Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
juni-juli

Euclides 9

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt ƒ55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ37,50; contributie zonder Euclides ƒ30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Jan Steenlaan 11, 8932 EA Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ48,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement ƒ29,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers ƒ8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

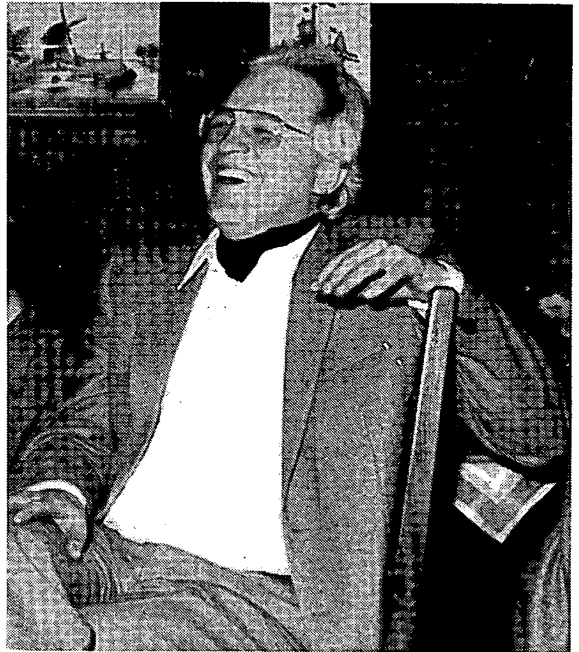
ISSN 01.65-0394

Eerbetoon aan Joop van Dormolen

Gerben Bulthuis

Het wiskunde-onderwijs in Nederland is zich maar steeds aan het ontwikkelen. Of er van groei of van bloei en misschien nog erger gesproken moet worden, laten we in het midden. Maar aandacht is er. De schooljeugd kiest exact en slaagt exact. De wiskunde in het vwo zegt A èn B en nu moet het havo ook wel. En C zeggen kan dan niet lang op zich laten wachten.
Voor zoveel mooi wiskunde-onderwijs zijn ook veel goede wiskundeleraren nodig. Om die op te leiden zijn er reeds mooie instituten met goede opleiders. Maar er zijn wat weinig studenten die de extra tijd en de extra moeite er voor over hebben om een laag beginsalaris te gaan verdienen waar vriendjes in het bedrijfsleven al een jaar eerder veel beter behandeld worden. En die mooie instituten hebben daardoor minder opleiders nodig en wie dan maar net boven de Prick-leeftijd is gekomen wordt al geconfronteerd met de vraag: 'Zou je misschien niet met vrijwillig gedwongen of met gedwongen vrijwillig ontslag willen gaan?'
Joop van Dormolen is gegaan. In de herfst van 1987 heeft hij zijn aanstelling als docent voor de didactiek van de wiskunde er aan gegeven en in een mooi symposium hebben velen dat op 2 oktober met hem 'gevierd'. Een symposium over leerstofordening, vanzelfsprekend zult u zeggen, en zo was het ook. Hetgeen daar verhaald is kan nagelezen worden in de S.V.O.-uitgave 'Leerstofordening: over de grenzen van een begrip'.[1]
Hier zij alleen vermeld dat het werk van Van Dormolen van veel kanten belicht is, dat Joop aardig in het zonnetje gezet is.
Dit nummer van Euclides doet dat ook, op een andere manier. Fred Goffree voegt een hoofdstuk toe aan zijn 'Ik was...'-serie en Steven ten Brinke, hoogleraar in de algemene didactiek in Utrecht, comprimeert hem tot een sonnet, met verwijzing naar zijn proefschrift.
Zoveel aandacht voor één persoon in een toch zo weinig van persoonsverheerlijking te verdenken blad. Dan moet er wel iets bijzonders aan de hand zijn. Dat vindt de redactie inderdaad.
Joop van Dormolen, de 'godfather' van de didactiek van de wiskunde, het onbetwiste middelpunt in de kring van wiskunde-onderwijzers, ja zelfs omgekeerd, net als van de 200 van Mertens werd er soms gesproken van de n-1 van Van Dormolen.
In een merkwaardig mengsel van bescheidenheid en directheid, van verlegenheid en zelfverzekerdheid, heeft Joop van Dormolen de didactiek van de wiskunde, het wiskunde-onderwijs, een gezicht gegeven. Door zijn boek dat hij, waar Wansink niet verder durfde gaan dan 'Didactische Oriëntatie...', bijna onbeschaamd 'Didactiek van de Wiskunde'[2] noemde, maar dat gewoon bekend staat als 'Van Dormolen'. Door artikelen, brochures, wel of niet in samenwerking met (andere) leden van de didactiek-commissie van de Vereniging, op conferenties en natuurlijk niet het minst als didactiekdocent voor zijn eigen studenten. Zijn proefschrift (weer heel bescheiden 'Aandachtspunten'[3] geheten) en zijn aandeel in 'Perspectives on Mathematics Education'[4] behoren misschien (nog) niet tot het dagelijkse gebruiksgoed van de Nederlandse wiskundeleraren, maar ze zijn wel blijken van nog niet te stuiten drift om het wiskunde-onderwijs te analyseren en te verbeteren.
De verdienste van Joop van Dormolen is dat hij kans gezien heeft een aantal dóórzichten door het

wiskunde-onderwijs te creëren die hemzelf en anderen het inzicht verschaften hoe het verbeterd kon worden. Bruikbare leertheorie heeft hij omgevormd tot handzaam materiaal voor de analyse van het onderwijs en daarmee tot de constructie van nieuw onderwijs.
Zijn geschriften munten niet uit in spanning-oproepende mooischrijverij, zijn voordrachten en discussiebijdragen zijn van retoriek en demagogie volstrekt gespeend, maar altijd slaagt hij er in een aantal gedachten over te brengen die lezer of hoorder een nieuwe kijk geven op wat wiskunde-onderwijs kan of moet zijn. De indruk gevend dat hij zelf eigenlijk nog aan het zoeken is, geeft hij al dingen aan die voor anderen vondsten zijn.
Kortom, dit maandblad voor de didactiek van de wiskunde stelt graag een fors aantal bladzijden beschikbaar voor deze man. Gelukkig is hij teruggetreden als didactiekdocent op een moment dat hij door de nu verkregen vrijheid nog veel meer voor het wiskunde-onderwijs kan betekenen.



Noten

1 *Leerstofordening: over de grenzen van een begrip.* Vakdidactische visies op een omstreden onderwerp, onder redactie van H. G. B. Broekman en J. M. J. Weterings, S.V.O. 1988 (prijs *f* 39,50).
2 J. van Dormolen, *Didactiek van de wiskunde*, 3e herziene druk, Utrecht 1981.
3 J. van Dormolen, *Aandachtspunten, de a priori analyse van leerteksten voor wiskunde bij het voortgezet onderwijs.* Proefschrift, Utrecht 1982.
4 J. van Dormolen, *Textual analysis*, in: B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte (editors), Perspectives on Mathematics Education, Dordrecht 1986.

Sonnet

Steven ten Brinke

Joop! is binnen*

Jouw aandachtspunten zijn de aandacht waard,
via je a priori analyse.
Daardoor werd je een éminence grise,
en bracht de math'matiek in kaart.

Je bleef naar buiten zeer bedaard.
Van binnen zocht je, kon niet kiezen,
viel, stond weer op, dank zij je expertise,
en eind'lijk, eind'lijk had je 't werk geklaard.

Toch was jij, Joop, niet assertief.
Bescheiden zei je: ''t Is beginnen',
en dacht weer verder over plussen, minnen.

Geen praatjes; denken! was jouw hoofdmotief.
Daarom hoef ik niets verder te verzinnen.
'k Zeg slechts de woorden: Joop! is binnen.

2 oktober 1987

* affiche op etalageraam van parfumerie op de Oude Gracht in Utrecht.

Leren van en leren met Joop van Dormolen

in gesprek met *Fred Goffree*

Afscheid

Afscheid nemen is anno 1987 niet meer wat het voorheen was. Nog niet zo lang geleden was het alleszins gebruikelijk om een zojuist gepensioneerde toe te spreken in termen van het verleden. De loftrompet werd gestoken vanwege al datgene wat er tot stand gebracht was, wat was blijven liggen kwam voor rekening van de opvolger. Zonder dat nu al te nadrukkelijk te vermelden, was het iedereen wel duidelijk dat de toekomst aan de laatste was. Vol verwachting gingen de ogen dan ook al in die andere richting. Sinds het boven bedoelde afscheid nemen in de meeste gevallen 'vervroegd uittreden' heet, ligt het anders. De feestvarkens zelf blijken nu vol van plannen voor de toekomst. Zij voelen zich ontdaan van de last die het dagelijkse werk met zich meebracht en zien de nieuwe vrijheid als een gunstige omstandigheid om allerlei onafgemaakte karweien alsnog en met meer energie dan ooit te lijf te gaan.
Op 2 oktober 1987 nam Joop van Dormolen afscheid van zijn PDI. Negentien jaar had hij daar, op het Pedagogisch Didactisch Instituut voor de lerarenopleiding aan de Rijksuniversiteit te Utrecht gewerkt. Wie hem als student, practicumdocent, cursist of collega lerarenopleider in die tijd heeft leren kennen, weet wat met 'leerstofordening' bedoeld wordt en begrijpt bovendien waarom zijn collega's Broekman en Weterings dit tot de thematiek maakten van het Symposium ter ere van dit afscheid. In het programma van die dag kan men zien dat het bekende, door Joop uitgevonden leerstofordeningsmodel (OSaEV)* van diverse kanten belicht wordt: de praktijk van de school, de schoolboeken en de lerarenopleiding en de theorie betreffende achtergronden, verwante modellen en innovatie. De opbrengst van het Symposium zal in de vorm van een bundel voor een groter publiek beschikbaar komen. Daarin kan men dus het een en ander vinden over het werk van Joop van Dormolen en de sporen die het in de school van nu heeft nagelaten.
Ook het afscheid van Joop van Dormolen evenwel heeft elementen van de nieuwe stijl.
Hij zit boordevol plannen voor de toekomst en is uitdrukkelijk betrokken bij de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs voor de negentiger jaren. Een goede reden om eens met hem van gedachten te wisselen over wat hem nu bezighoudt, hoe het zo gekomen is, door wie en wat hij zich heeft laten beïnvloeden, welke interessante ervaringen hij niet onvermeld wil laten en hoe hij de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs van dit moment ziet. Wat hij met zijn nieuwe vrijheid zal gaan doen, moet dan inmiddels ook wel duidelijk geworden zijn.
Met dit globale plan en gesterkt door de ervaring die ik opdeed met *Ik was wiskundeleraar* trok ik de stoute schoenen aan...

Sociaal

Het was omstreeks 1968, de groots opgezette heroriënteringscursussen van de CMLW voor eerstegraads wiskundeleraren waren inmiddels geweest, toen ik Joop aantrof op een kamertje in het Mathematisch Instituut te Utrecht. De op een na bovenste verdieping was gereserveerd voor het secretariaat van de Commissie. Joop zat te studeren, hij bereidde zich voor op z'n pas verworven functie aan het PDI. Met enige bezorgdheid bekende hij nog grotendeels in het duister te tasten. Hij wist niet goed

---

HET IS EEN HARDNEKKIG
MISVERSTAND:

dat ik met de VUT ben.

---

waar te zoeken, welke richting te kiezen en beschouwde zijn eigen ervaring als wiskundeleraar als een onvoldoende oriënteringsbasis. Later kwamen wij elkaar vaak tegen, en of het nu was in het kader van 'ontwikkeling', 'opleiding', 'nascholing', of 'onderzoek', Joop bleef de voorzichtige onderzoeker van de 'praktijk', in toenemende mate in staat om zich reflectief op te stellen en af en toe voldoende gemotiveerd om zich 'in de theorie' te begeven. Als hij naar buiten trad, en dat kwam nogal eens voor, dan bracht hij z'n gedachten, ideeën en voorstellen uiterst omzichtig naar voren. Deze bescheiden, ietwat terughoudende opstelling, die neiging tot relativeren van de eigen inbreng werd nog eens geïllustreerd in het vraaggesprek dat omstreeks 2 oktober plaatsvond en waarvan hier verslag wordt gedaan.
Natuurlijk kwamen we over 'OSaEV' te spreken. Joop's eerste, spontane reactie was: 'Het spreekt me wel aan als instrument voor mijn lesgeven.' Even later gaat hij er nader op in:
Het succes van OSaEV slaat niet op de wetenschappelijke kwaliteit ervan. Harm Jan Smid en Agnes Verweij hebben in een artikel in TDB ('Tijdschrift voor Didactiek van de B-vakken') aangetoond, dat het allesbehalve volledig was. Maar dat was voor mij geen nieuws. Het is voor mij veel meer een onderwijshouding dan een echt model. De houding om goed na te denken over je onderwijs en daarbij te zoeken naar instrumenten om dat nadenken operationeel te maken.
Heel bijzonder ervoeren we beiden de momenten als we elkaar tegenkwamen in het kader van BACOMET, een sinds 1980 bestaande internationale werkgroep. In die kring groeide mijn waardering voor de vrijmoedige wijze waarop Joop zijn twijfels en vermeende beperkingen naar voren bracht. Het is interessant wat hij daar zelf van zegt in ons gesprek, het werpt ook een bepaald licht op wat er verder volgt:
Het was de periode dat de twee boeken van Freudenthal uitkwamen: 'Mathematics as an Educational Task' (Dordrecht 1973) en 'Weeding and Sowing' (Dordrecht 1978).
Het was de periode waarin jij, Fred, en ik gevraagd werden om aan BACOMET (een groep mensen uit verschillende landen, die samen iets goeds over de lerarenopleiding wilden schrijven) mee te doen. Dat was leren, leren, leren. Mensen ontmoeten uit

HET IS EEN HARDNEKKIG MISVERSTAND:

dat je iemand iets nieuws kunt leren door 't uit te leggen.

een andere sfeer met andere onderwijstradities, met andere tradities over de manier waarop wetenschap beoefend wordt. Michael Otte was voor mij de denkberg, waar ik telkens maar weer tegenop moest kruipen met het gevoel van de alpinist: weten dat je, als je boven bent, ontdekt dat dat maar schijn is. Er zijn hogere toppen en als die er niet zijn, zijn er andere die ook verkend moeten worden.
Ik reken mezelf nog steeds toe dat ik een belangrijke bijdrage gegeven heb aan het voortbestaan van BACOMET. Niet vanwege mijn wetenschappelijk werk, want daarin voel ik me vergeleken met de meeste BACOMET-leden nog een kleine jongen. In een heel ander opzicht. Op het PDI besteedden we altijd veel aandacht aan sociale vaardigheden. Duidelijk met je eigen gevoelens ten opzichte van anderen kunnen omgaan. Dat betekent ook dat je je gevoelens aan anderen kunt mededelen. Daar geloofde ik toen in en ik ben wat dat betreft nog niet van mijn geloof afgevallen. (Onlangs, bij mijn afscheid, vertelde Jan de Lange nog, dat het hem opgevallen was, dat ik op vergaderingen hardop vertelde dat ik kwaad was.) Het was bij wetenschappelijke bijeenkomsten, zeker internationale, opvallend hoe mensen steeds maar probeerden indruk te maken. Alsof ze bang waren niet voor vol te worden aangezien. En dan moesten ze bij discussies moeilijke en spitse vragen bedenken, terwijl ze dan minachtend neerkeken op mensen, die, zoals ik dat nodig heb, hardop moeten denken, om aan de weet te komen wat ze nu eigenlijk bedoelen. Ik heb indertijd in de BACOMET-groep gezegd, dat ik zo niet kan werken en ook niet wil werken. Ik zei, dat ik veel dingen niet begreep en daarom vragen wilde stellen. Dat ik het werken in BACOMET erg moeilijk vond. Dat ik hardop wilde kunnen denken zonder direct op mijn woordgebruik aangevallen te

worden. Ik was heel erg verrast, dat toen veel anderen durfden zeggen dat dat ook voor hen gold. Ik geloof nog steeds, dat daarmee een echte vruchtbare samenwerking en een atmosfeer van collegiale vriendschap is ontstaan.

De leidende gedachte

Duidelijke taal. Maar wat achter het werk van Joop van Dormolen schuilgaat, zogezegd de 'titelsong' van deze kleine biografie met autobiografische elementen, kwam in het gesprek naar voren toen de computer ter sprake werd gebracht. Kijkt u zelf maar:
COMPUTER: 'gebruiksvoorwerp; je kunt er van leren, niet: je kunt ermee leren'. Zeg ik dat nu goed? Ik moet proberen duidelijk te maken wat ik daar nu precies mee bedoel, want ik voel dat ik dicht bij de kern van iets wezenlijks zit. Met 'je kunt er van leren', bedoel ik, dat computers (eigenlijk moet je zeggen: computer-software) voorwerpen zijn zoals een hamer, een fornuis, een paar schoenen. Je kunt **van** voorwerpen leren door ze te gebruiken. Daardoor ontwikkel je je eigen vaardigheden. Door ze te gebruiken leer je beter knutselen, beter koken, beter veters strikken.
Je kunt er ook van leren dingen beter te begrijpen. Je kunt beter begrijpen hoe je dingen aan elkaar kunt vastmaken, hoe je een gerecht smakelijker kunt maken, hoe je over grint kunt lopen.
Je kunt niet **met** dingen leren. Ik leer met mijn vrouw hoe ik beter kan liefhebben, met Harrie Broekman hoe ik studenten didactische vaardigheden kan laten verwerven, met die studenten hoe ik kan voorkomen dat ik ze dingen laat doen waar ze nog niet aan toe zijn.
Kortom met **'ermee leren'** bedoel ik een sociale relatie waarbij de partners elkaar wederzijds helpen hun gevoelens te verhelderen, hun kennis uit te breiden, hun vaardigheden te vergroten, hun ... te ...
Je merkt dat er nog steeds pogingen zijn software te maken opdat leerlingen **met** de computer kunnen leren. Een jaar of vijftien geleden heb ik in een groep meegedaan, die interactieve software wilde maken. Ik heb toen een stroomdiagram gemaakt voor het leren oplossen van een eerstegraads vergelijking.
Het was heel leerzaam om te proberen tot op de bodem te analyseren wat er bij het leren van de leerlingen fout zou kunnen gaan. Als een leerling iets fout deed werd naar een hulpmodule overgeschakeld. En als er dan weer iets fout ging, ging het programma naar een hulpmodule. Zo konden we steeds dieper in allerlei niveaus duiken om er achter te komen waar de schoen bij de leerling wrong. We bouwden ook controles in om na te gaan of een correct antwoord wel voortkwam uit de juiste overwegingen: Maar zo kun je niet verder gaan. Ik had een blad papier van 1,5 bij 1,5 meter op de muur, waarop een stroomdiagram met vertakkingen van vertakkingen van vertakkingen ... (Er zijn wel handiger methoden, maar daar gaat het nu niet om.) Er was een vertakking die zo'n vijftig keer voorkwam: Een leeg scherm met daarop alleen de woorden: 'Roep je leraar of lerares'. Een wanhoopsdaad van de analysator.

HET IS EEN HARDNEKKIG
MISVERSTAND:

dat wiskunde gemakkelijk is als hij elementair is.

Het is natuurlijk niet mogelijk alle mogelijke fouten en vergissingen te bedenken. Het belangrijkste wat ik van dit werk en **met** de medewerkers van het project leerde is dat de sociale context niet vervangen kan worden door een mens-apparaat-relatie. (Het woord relatie is hier zeer misplaatst.)
Er zal zeker wel interactieve software bestaan, of in de toekomst gemaakt worden, waarmee leerlingen veel goeds leren. Op de lange duur moet er echter iets mis gaan. Als je tijdens het leren niet met andere mensen omgaat, gaat er op den duur ergens een radertje binnenin je, fout zitten.
Vroeger dacht ik dat mijn leerlingen iets van mij moesten leren. Ik ben bang dat veel mensen nog steeds denken dat hun leerlingen iets **van** hen moe-

ten leren. Ik ben nog banger dat er veel mensen zijn die denken dat ze iets **van** een ander moeten leren. Leren waarbij mensen betrokken zijn is altijd leren *met*.
Zo te zien zit Joop inmiddels op z'n praatstoel. Van nu af aan laat ik hem alleen aan het woord en beperk ik me tot het plaatsen van kopjes tussen de onderdelen.

Leermeesters

Waaraan ik denk bij de naam 'SKEMP'? Een aardige man, hij gaf me een goede start. En vooral dat laatste was voor mij van groot belang.
Toen ik aan de baan begon wist ik niets van didactiek. Mijn toekomstige baas, professor Rudi Mossel zei in het oriënterende gesprek, dat dat niet zo erg was. Hij was ook zo begonnen als leraar Frans. Hij gaf me vijf jaar. Eerst stelde hij een gentleman's agreement voor, dat er op neer kwam dat ik vrijwillig ontslag zou nemen als het na vijf jaar niet gelukt zou zijn. In een volgend gesprek nam hij dat terug, want hij vond dat een onfatsoenlijk voorstel. Achteraf gezien was dat ook zo.
Ik dacht toen: 'Vijf jaar? Als ik het het volgend jaar nog niet kan, dan ga ik toch weg. Gentleman's agreement of niet. Vijf jaar later zag ik in dat hij gelijk gehad had.
Kort en goed, we (= Harrie en ik) begonnen met een erfenis van Bunt. Die was niet groot. We moesten het echt zelf uitzoeken. Je was toen erg afhankelijk van literatuur die je bij toeval tegenkwam. Alleen Wansinks boeken. Dat waren in het begin van de jaren zestig openbaringen, maar tien jaar later ging je toch tekorten voelen. Zeker als het ging om het opleiden van studenten.
Er waren natuurlijk ook nog anderen die zich met didactiek bezighielden. Maar het leek wel of we allemaal op dezelfde manier doorgingen zoals we dat als leraar gewend waren: op eigen houtje, met vallen en opstaan en af en toe toevallig tegen een goed idee aanlopend. Vervolgens was je dan niet in staat dat goed onder woorden te brengen ten behoeve van collega's. We hadden destijds het metaniveau nog niet uitgevonden.
De mensen die wel iets konden zeggen kwam je niet tegen. Ik denk aan Van Hiele. Die had toch een monumentaal proefschrift geschreven. Maar de enkele keren dat ik een voordracht van hem hoorde deden me niet verlangen meer van hem te leren. Eerlijk waar, ik was hem compleet vergeten totdat veel later zijn 'Begrip en Inzicht' (Purmerend 1973) verscheen.
Er kwam ook wel het een en ander in Euclides. Maar het was niet wat ik zocht. Niet dat ik toen wist wat ik wel zocht, want, zoals ik al zei, we hadden het metaniveau nog niet uitgevonden. Het was wel een spannende tijd. De grote heroriënteringscursussen waren geweest. Er begon net een beetje door te dringen, dat het overdragen van didactiek aan leraren in functie niet noodzakelijk tot verfoeide staatspedagogiek behoefde te leiden.
Dat leraren wel degelijk hun eigen verantwoordelijkheden behielden, ook als ze iets van een ander over hun lesgeven leerden. De CCBMW, de Centrale Commissie Begeleiding Mavo Wiskunde, begon. Ik denk dat het toenmalige 'Mavo-Verband' een goede zet heeft gedaan door alleen akkoord te gaan met de invoering van een nieuw wiskundeprogramma voor het mavo, als daar niet alleen wiskundige, maar ook didactische bijscholing tegenover stond. Ik geloof dat ze toen wel degelijk voor eigen parochie spraken, maar de stellingname heeft tot een belangrijke doorbraak geleid.

Met de collega's van andere universiteiten en nog velen meer die ik vooral via de CCBMW leerde kennen, kwamen we dikwijls bij elkaar. We wilden echt samen zoeken.
Dat gold ook de literatuur. Er was wel het een en ander, maar waar moest je zoeken? Bunt had een omvangrijke bibliotheek nagelaten. Daar stond veel wiskunde in, en ook wel vakdidactiek. Je kon dat allemaal niet systematisch doorwerken. Ik ben daar toen wel aan begonnen, maar gaf dat gauw op. Over het algemeen stond er hetzelfde wat we elkaar vertelden: de zaken die we toevallig tijdens ons onderwijs ontdekt hadden. Ik geloof dat het Arie van Tooren was, die me toen attent maakte op het boek van Johnson en Rising, 'Guidelines for Teaching Mathematics' (Belmont 1967). Het was het eerste boek waarin ik min of meer systematisch geordende ervaringen van leraren aantrof, die waren opgenomen met de bedoeling conclusies te trekken. Uit dat boek heb ik overgenomen wat ik later omwerkte tot 'Aspecten van wiskunde: Theorie, Algoritmen, Logica, Methodiek en Conven-

ties'. Deze namen zijn later gekomen. De inhouden zijn in de loop van de tijd ook veranderd. Maar het was de eerste kiem van een systematische vakdidactiek. Kennis waarmee je lessen kon voorbereiden en nabespreken en waarmee je teksten kon beoordelen.

Een ander boek waar ik in die tijd ook veel in neusde (hetgeen betekent, dat ik daar ook iets van een metaniveau in voelde) was van DeCecco, 'The Psychology of Learning and Instruction' (Englewood Cliffs, 1968). Aan de jaartallen zie je trouwens, dat wat in ons wereldje leefde ook elders in de wereld bestond. Er was op vele plaatsen een beweging van het pure vak naar de vakdidactiek.

Dit was een lange aanloop naar Skemp. Zo zie je maar wat associaties oproepen.

Iemand van de uitgeverij van de Prisma-boeken had me Skemps, 'The Psychology of Learning Mathematics' (Harmondsworth, 1971) in handen gespeeld. Ik herkende daar veel in van wat we al enige tijd aan het zoeken waren. Het verschilde in de grond niet zo veel van wat in DeCecco stond, maar het was veel herkenbaarder voor een gewone wiskundeschoolmeester. Ik was daar toen erg enthousiast over. Tineke, mijn toenmalige vrouw, en ik hebben toen het eerste deel van Skemps boek vertaald. Het tweede deel sprak me niet aan. Daarin wilde Skemp laten zien hoe je zijn theorie kon toepassen op het ontwikkelen van materiaal voor leerlingen. Ik geloof dat ik dat toen een mislukte poging vond. Maar daarmee was de theorie natuurlijk niet verworpen.

Uit Skemps ideeën zijn later de begrippen Sorteren, abstractie controleren en Expliciteren voortgekomen. Na veel praten met collega's, ook collega's van andere vakken op het PDI. Ook van en met hen heb ik veel geleerd. Wat dat betreft staan de vele en lange uren met Harrie Broekman stevig in mijn geheugen gegrift. We hebben wat afgepraat. We probeerden elkaar onderuit te halen, we gedroegen ons nu eens als een recalcitrante leerling, dan weer als een rechtlijnige leraar. (Zo rechtlijnig kwam ik ze in werkelijkheid nooit tegen, misschien een keer in een roman of televisiespel. Maar het hielp ons om te leren wat we wilden leren.)

Na drie of vier maal omwerken van een collegedictaat is tenslotte in 1973 'Didactiek van de Wiskunde' verschenen. Harrie heeft daar veel invloed op gehad en de vele uitweidingen, waaraan de eerste versies mank gingen, werden door de studenten goed onderuit gehaald. Twee van hen, Thea de Poel en Henny Susijn, hebben dat later meer systematisch gedaan. Van hen heb ik veel geleerd van wat ik tèn gevolge van de oorlogstijd op school gemist had aan expliciet Nederlands idioom. Zo had ik nooit geleerd om opstellen te schrijven. Mijn examenopstel was behoorlijk zwak, geloof ik. Door de samenwerking met Thea en Henny ging ik me vooral realiseren dat er een verschil bestaat tussen spreektaal en schrijftaal. Dat verschil is nu haast een hobby geworden.

Het verschijnen van 'Didactiek van de Wiskunde' markeert voor mij een eerste leerperiode, namelijk die waarin het gebied van de vakdidactiek werd geëxploreerd. Het had dus ongeveer vijf jaar geduurd. Rudi Mossel had gelijk gehad.

Waarom kwam er in me op bij 'SKEMP': 'een aardig man'? Dat is een beetje onaardig van mij. Ik heb later Skemp verschillende malen ontmoet. Ik vond hem toen een aardige man. Niet in de betekenis van 'aardig voor anderen'. Hij was dat wel, maar hij riep bij mij een dergelijk gevoel niet op. Ik kreeg sterk de indruk dat hij in een eigen wereld leefde. Als je daar binnen wilde, was je van harte welkom. Dan was hij ook aardig in de eigenlijke betekenis. Dan kon hij je prima helpen en met je praten. Maar als je andere zaken trachtte te verkennen, dan raakte je hem kwijt. De eerste keer dat ik met hem sprak moest ik wel aan hem wennen. Als ik hem wat vroeg, bleef het soms een hele tijd stil. Ik dacht eerst dat hij mijn slechte Engels niet had verstaan, maar dan bleek dat hij zich had teruggetrokken in de eigen wereld om na te denken over de vraag. Even later kwam hij inderdaad met een antwoord, waaruit bleek dat hij wel degelijk over de vraag had nagedacht. Hij zei eens: 'I am a slow speaker, because I am a slow thinker'. Toch wel aardig, vond ik, dat hij mijn vragen serieus nam. Maar zijn antwoorden waren naar mijn zin teveel bepaald door zijn eigen structuren, die later in zijn boek 'Intelligence, Learning and Action' (Chichester 1979) tot uitdrukking kwamen. Dat was me allemaal net iets te logisch geordend. Het paste allemaal en dat kan nooit goed zijn.

Tijdens een seminarium bij sterrenkunde heb ik Minnaert eens horen reageren op een referaat waarin een fysisch model van een bepaald stertype werd behandeld. De referent en wij waren allemaal

onder de indruk hoe goed het model aansloot bij de waarneming. Minnaert zei toen, dat hij het niet kon geloven, want het klopte zo goed. Dat was voor mij een grote les in natuurwetenschappelijk onderzoek. Zo was het bij Skemp ook.
Ik heb hetzelfde verwijt heel vaak te horen gekregen over het OSaEV-model. Ik heb me daar vele jaren tevergeefs tegen verdedigd. Ik weet heel goed, dat modellen benaderingen zijn. Maar mensen schijnen toch complete antwoorden van je te willen hebben.

HET IS EEN HARDNEKKIG MISVERSTAND:

dat wiskunde gemakkelijk is voor kinderen die het leuk vinden.

VAN DER BLIJ: 'kan mensen aan het werk zetten'.
Hij heeft een merkwaardige invloed gehad op mijn carrière. Ik kwam hem voor 't eerst tegen op het mondelinge examen Wiskunde-K5 in januari 1955. K5 was indertijd het examen waarmee je volledig bevoegd werd om wiskunde-onderwijs te geven als wat later eerste-graads-leraar zou gaan heten. Mijn laatste onderwerpen Analytische Meetkunde en Beschrijvende Meetkunde werden afgenomen door een paar jongere heren. Zo rond de dertig, dacht ik. Ze hadden zich niet voorgesteld, dat deed je toen niet als examinator. Soms kreeg je wel een hand. Ik wist dus niet wie het waren en al had ik de namen gehoord, dan zouden ze me nog weinig gezegd hebben. Maar, dacht ik, het waren geen professoren. Want om professor te zijn moest je ook oud zijn. Ze vroegen wel vreemd, helemaal niets uit de theorie die ik geacht werd te kennen. Allemaal nieuwe dingen die ik met de theorie (die ik inderdaad wel goed kende) en wat vaardigheid redelijk goed kon oplossen. Achteraf zie ik dit als mijn eerste les over 'wiskunde als activiteit'. Het examen ging ook heel goed. Dat was blijkbaar aanleiding om wat eerder op te houden en een praatje te maken. Een van de twee vroeg of ik nog verder ging studeren in de wiskunde. Ik begreep dat toen niet zo goed. Ik had nu toch K5? Daarmee had ik toch alle wiskunde binnen? Ik durfde dat toen niet te zeggen, want je wist maar nooit of ze misschien toch gelijk hadden. Deze man zei, dat hij in Utrecht werkte en dat ik maar eens moest komen praten op het Mathematisch Instituut.
Na de feestelijkheden rond het behalen van K5 bén ik maar eens gaan praten. Ik werd verwezen naar meneer Van der Sluis. Die was er voor adviezen aan studenten. Hij hoorde me aan, pakte de telefoon en zei: 'Ik heb weer zo'n leraar. Kom je even beneden?'
De man die beneden kwam was dezelfde als mijn examinator. Hij stelde zich voor als professor Van der Blij.
Dus toch een professor! (Die andere man trouwens ook. Dat was professor (Nico) Kuiper. Destijds nog in Nijmegen.)
Ik besloot toen maar om het te proberen in Utrecht en Van der Blij heeft me geholpen om de eerste jaren van het kandidaats snel door te komen. Althans wat de wiskunde betreft.
Ik was leraar met een volle baan en veel buitenschools werk. Dus eigenlijk heb ik niet gestudeerd in Utrecht, maar heb ik tentamens gedaan. Zo een of twee per jaar. Ik kan me ook niet veel herinneren over het wiskunde studeren. Wel over het tentamen doen. Mijn tweede les over 'wiskunde is activiteit' kreeg ik weer van Van der Blij. We hadden afgesproken dat ik, als ik er aan toe was, met zijn collegedictaten voor het eerste en tweede jaar bij hem mocht komen om nog het een en ander te vragen. Met mijn achtergrond als voltijds leraar met K5 hoefde ik geen college te lopen en niet met de practica mee te doen. Toen ik veel vragen opgespaard had ben ik naar hem toegegaan. Dat zal een goed jaar later geweest zijn. Hij antwoordde vriendelijk op alles wat ik vroeg en toen ik uitgevraagd was zei hij dat ik dus nu tentamen bij hem had gedaan. Een tentamen waarbij de kandidaat de vragen stelde!
Mijn derde les in 'wiskunde als activiteit' kreeg ik van Freudenthal. Dat is aardig om het er even tussendoor te vertellen.
Freudenthal was een gevreesd man onder studenten (die hem nog niet zo goed kenden). De studenten moesten in die tijd tweemaal een voordracht

houden op een seminarium waar alle stafleden en doctoraalstudenten bij aanwezig waren. Freudenthal zat achterin en als je iets fout zei, of onvolledig was, kreeg je een sarcastische vraag. Dat soort vragen kwam van verschillende stafleden, maar Freudenthal liet zich zelden onbetuigd. Dit beeld zal wel vertekend zijn, maar zo voelde je dat als student. Het was alsof je ontgroend werd. Als leraar voelde ik me extra aangesproken. Ik vond dat ik de presentatie goed moest kunnen doen en bovendien voelde ik me niet echt een student.
Er werd ook van hem verteld, dat hij veel onvoldoendes uitdeelde bij tentamens. Niemand kon dat aantonen, maar je geloofde het.
Zo kwam ik een keer bij hem tentamen doen over Representatie van Groepen. Het duurde meer dan twee uur. Ik had het gevoel dat alles mis ging. Als hij iets uit het dictaat vroeg wist ik wel antwoord, maar als hij een probleem gaf waarin ik de theorie moest toepassen kwam ik er steeds maar niet uit. Tenslotte bromde hij dat het wel genoeg was en ik wist zeker dat ik over een maand of drie mocht terugkomen om het over te doen. Hij begon echter een tentamenbriefje te schrijven en toen ik het in handen kreeg was ik zo verbaasd, dat ik eruit flapte: 'Hoe kunt u me een 8 geven? Ik wist bijna niets goed op te lossen.' Hij keek wat geërgerd dacht ik en bromde, dat dat ook niet hoefde. Het ging erom dat je goed met de theorie om kon gaan. Niet alle opgaven hebben een antwoord.

Ik liep Van der Blij nog een paar keer tegen het lijf bij 'echte' tentamens en kwam hem ook regelmatig tegen bij conferenties. Hij was toen ook al een veel gevraagd spreker en ik liep nogal wat conferenties af. Ook in het buitenland. Je had toen onder andere in België de Internationale Heroriënteringscursussen. Maar dat is een verhaal apart. Ik had Van der Blij ook gevraagd om me te begeleiden bij mijn afstudeeronderwerp. Eigenlijk was de wiskundestudie niet nodig, want ik was tenslotte volledig bevoegd leraar. Dus waarom zou je? (Als doctorandus kreeg je er wel drie dienstjaren bij, maar daar hoefde je het niet voor te doen. Je zat dan alleen drie jaar eerder op je maximum.)
Van der Blij had toch zoveel invloed op me, dat ik besloot om nog maar even door te gaan met de studie. Zo kwam ik hem ook eens tegen op een conferentie toen hij terloops vroeg wanneer ik klaar zou komen. Ik wist helemaal niet hoever ik was, maar in een volgend gesprek bleek dat ik al aardig boven het vereiste aantal punten zat. Alleen wat afstudeerwerk restte nog. Van der Blij vond dat dat maar snel afgemaakt moest worden. Maar merkwaardigerwijs kon hij er maar niet genoeg van krijgen. Telkens vond hij weer iets interessants in wat ik tot dan toe had gedaan. Daarover moest ik dan ook nog maar eens iets lezen. Er stond nog een aardig boek in de bibliotheek... Ik herinner me dat ik op een zeker moment de stoute schoenen aantrok en hem vroeg of het nu niet zo langzamerhand welletjes was. Dat gaf hij toe en opeens had hij haast. Het moest snel gaan. Ik moest nog voor de zomervakantie doctoraal doen. Dat was in het voorjaar van 1965, tien jaar later dus. Ik zei dat het niet kon, want op dezelfde dag zou de diploma-uitreiking zijn van mijn HBS-klas. Hij wist me te overtuigen dat het net kon. Als ik eerst in Utrecht de doctoraalbul in ontvangst nam, kon ik het met de auto net halen om op tijd op school terug te zijn. Dat bleek niet helemaal waar, want toen ik terugkwam was de diploma-uitreiking al onderweg. De rector haalde toen nog het grapje uit om na alle examenkandidaten toegesproken te hebben, en het diploma te hebben overhandigd, te zeggen dat er nog een examinandus was, die hij als laatste wilde gelukwensen. Toen moest ik voor het front. Het zijn toen wel leuke eindexamenfeestjes geweest. Ik hoorde er echt bij als een van de feestvarkens.

Een paar dagen later bleek waarom Van der Blij ineens zo'n haast gehad had. Ik werd bij de rector geroepen. Daar zat Gribnau. Die was inspecteur, maar niet van ons rayon. Dat was wel vreemd, maar al ras bleek dat hij mede de zorg had voor het opzetten van een experiment Algebra en Analyse in de bovenbouw. Daaruit moest het nieuwe eindexamenprogramma voor het toekomstige vwo voortkomen en er waren leraren nodig om in de klas te experimenteren. Van der Blij had ondermeer mij daarvoor uitgezocht.
Als gevolg van mijn werk voor dat experiment ben ik later een jaar gedetacheerd geweest bij de CMLW, de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, die al sinds 1961 actief was.
In die tijd ook besloot Bunt om naar de VS te gaan waar hij al geruime tijd goede contacten had. Ze zochten dus een nieuwe didactiekdocent en Van der

Blij en Monna (destijds secretaris van de CMLW) hadden besloten dat ik dat maar moest worden. Mijn verbazing was groot en ik maakte de tegenwerping dat ik niets van didactiek afwist maar die werd door beiden weggewoven. Dat wist niemand en dat was dus niet erg.
Van der Blij is ook een van mijn promotoren geweest. Ik was toen inmiddels wel aan zijn stijl van begeleiden gewend: nieuwsgierig duiken in wat je allemaal bedacht hebt en dan vervolgens een vraag bedenken, die er net even buiten viel.
Ik heb nog diverse malen met Van der Blij samen mogen werken in commissies en cursussen. Altijd heb ik het gevoel gehad, dat ik zelf besliste wat ik zou gaan doen. Ik kreeg van hem geen opdrachten. Wel vragen waar je aan kon gaan werken als je dat wilde. Bij mij werkte dat goed, ik denk omdat ik ook graag in die stijl werk met mijn leerlingen.

Grote invloeden

Natuurlijk zijn er vele anderen geweest waarvan ik de invloed min of meer bewust heb ondergaan. Vraag je me nu om spontaan een aantal op te noemen, dan komen de volgende namen naar voren: Otte, Van Parreren, Vygotskii. Na Van der Blij, Skemp en Freudenthal ook in die volgorde. Maar als je me wat meer tijd geeft, zullen er meer blijken te zijn.
Ik noem nog vier, die ik nog niet genoemd heb (doe ik daarmee de vele anderen onrecht?):
Ten eerste: Johan Wansink. Hij leerde me dat er onderscheid is tussen mijn mening, mijn geloof en mijn kennis. Ik zou een hoofdstuk voor het derde deel van 'Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren' (Groningen, 1970) schrijven. Daarin zou mijn opvatting over de volgorde van behandelen van de begrippen 'continuïteit en limiet' naar voren worden gebracht. 'Limiet' moest volgens mij, in tegenstelling tot de gangbare opvatting daarover, het afgeleide begrip zijn. 'Continuïteit' stond voorop, meende ik. Ook nu nog, maar ik ben nu in staat om het met de begrippen Kern en Probleemsituatie te onderbouwen. Destijds had ik er geen duidelijke argumenten voor. Wansink vroeg me de tekst zodanig te herzien dat de lezers vrij zouden zijn een eigen keus te doen.
Zijn aanwezigheid op de eerste grote ICME (International Commission on Mathematics Education), die in 1969 te Lyon werd gehouden, zette me op een bepaald spoor. Tijdens een wandeling in een park spraken we over schoolboeken en teksten. Toen werd het idee geboren om op zoek te gaan naar criteria voor goede leerteksten. Daar is jaren later mijn proefschrift uit ontstaan. Ik ben blij, dat ik hem het eerste exemplaar van het proefschrift nog heb kunnen brengen.
Ten tweede: Dick van den Haak. Hij was collega aan mijn school in Oegstgeest. Toen ik hem mijn eerste tekst voor MO-A-kandidaten had laten lezen gaf hij het me terug met de mededeling, dat ik het wel in de kachel kon gooien. Dat zou niemand kunnen begrijpen. Hij kon me niet zeggen waarom. Dat voelde hij zo aan. Ik was diep verontwaardigd. Die wiskunde was toch zo duidelijk uitgewerkt. Maar hij had gelijk. Nu zou ik wel kunnen zeggen waarom. Maar hij, noch ik wisten dat toen. Later, toen de Mammoetwet en daarmee het nieuwe programma al lang en breed ingevoerd was, zette hij de actie WISKOBAH op. Als reactie op al die vernieuwers, die oefenen en algoritmen maar minderwaardig vonden en alleen op begrip wilden werken. Hij had wel een beetje gelijk, maar zijn 'Back-to-the-Basics' actie ('leer ze eerst de algoritmen maar eens goed, dan komt het begrip vanzelf wel') was ook onjuist. Hij kreeg enorme bijval. Korte tijd later is hij overleden. Zijn zoon vertelde me dat hij dozen vol brieven met adhesiebetuigingen gevonden had. Dick zelf zei dat dat er over de 2500 waren. Op een totaalbestand toen van ongeveer 6000 wiskundeleraren was dat indrukwekkend.
Diverse mensen wilden hem met tegen-artikelen te lijf, maar in de didactiek-commissie besloten we tot een positievere actie. Hij had immers gelijk, dat je leerlingen de gelegenheid moet geven goede algoritmische vaardigheden te verwerven. Maar wat zijn goede vaardigheden? Die vraag was de aanleiding om te zoeken naar operationele criteria en zo is 'Vaardigheden, 1001 oorzaken waarom leerlingen geen (goede) routine hebben' (IOWO 1975) ontstaan.

We spraken over het bewust ondergaan van invloeden. Het derde voorbeeld in deze rij is het IOWO. Ik heb daar nogal tegenstrijdige herinneringen aan. Zeker ten aanzien van de groep WISKOBAS. Enerzijds (een haast afgunstige) bewondering van-

wege de kostelijke vondsten om in niet-wiskundige contexten echte wiskunde te leren. Anderzijds vond ik ze vreselijk elitair (in de negatieve betekenis). Ze straalden zoiets uit van 'Wat wij doen is goed' (wat waar was) 'en wie anders wil is een knoeier' (waar ze natuurlijk ongelijk in hadden). Echt luisteren naar anderen, van buiten de eigen kring, deden ze niet. Daaraan stoorde ik me in hoge mate. Vreemd genoeg hielp dat me nu juist weer om te doordenken waarom de door hen gemaakte spullen zo goed waren. Ik heb eens met een van de groep, ik weet niet meer precies wie, een lange maar helaas eenzijdige discussie gehad over jouw tien 'Doorkijkspiegelingen' (Wiskobas Bulletin, 1973) voor het voorbereiden van onderwijs. Ik had het gevoel dat jij wel nuttige dingen opgeschreven had, maar nogal erg ongestructureerd van alles overhoop haalde. Ik had het gevoel, dat mijn gesprekspartner mij maar dom en eigenwijs vond om niet voetstoots te aanvaarden wat Goffree geschreven had.

HET IS EEN HARDNEKKIG MISVERSTAND:

dat er zoiets bestaat als 'de' wiskunde.

Later is dat elitaire heel wat minder geworden. Zeker toen George Schoemaker directeur van WISKIVON werd. Toen klonk er een geheel andere benadering van leraren in het werk door. Met veel meer respect voor hun problemen van alledag en met begrip voor de problemen die het omschakelen met zich meebrengt. Toen kon ik ook veel vrijer genieten van hun originele vondsten.
Kort daarna begonnen we, met Dio Soeteman van WN, aan wat nu uiteindelijk, na lang zwoegen Wiskunde Exact (Meulenhof Educatief) aan 't worden is. We lieten ons inspireren door de ideeën van Wiskivon.
Tenslotte noem ik als vierde Piet van Wingerden. Die was al een tijd mentor bij onze stage oude stijl, wat toen hospiteren genoemd werd. Een wiskundestudent die de leraarsbevoegdheid wilde halen moest naast het werk op het Instituut 80 lesuren hospiteren. Door het Departement werd ons gevraagd in verband met de komende NLO's, te experimenteren met een nieuwe stagesoort. We hebben toen, naar een idee van de biologen op het PDI, de 'trio-stage' bedacht. We geloven nu ook nog dat dit een uitstekende aanpak is, al is die niet voldoende. De mentor, die schoolpracticumdocent ging heten, kreeg nu een aantal taakuren. Daarvoor moest men tamelijk intensief begeleiden en om dat meer bewust en doelgericht te kunnen doen kregen zij van te voren een cursus op het PDI. Piet was een van hen.

Ik had hem leren kennen als een aardige, maar wel wat vastgelopen man. Hij gaf geroutineerd les. De lessen waren degelijk en zijn mentorwerk leek ons plichtsgetrouw, maar het was allemaal niet erg inspirerend. Hij was van mijn leeftijd en ik meende bij hem dezelfde symptomen te herkennen als die ik zelf vertoonde voordat ik aan het Algebra-Analyse experiment deelnam: Je zou wel anders willen, maar je weet niet precies wat of hoe. Om die behoefte te stillen heb je anderen nodig. (Daar kun je dan mee leren.)
De schoolpracticumcursus is voor hem de oogopener geweest. Het leek wel of er een gat in het plafond werd gezaagd, waardoor hij weer kon doorgroeien. En dat ging fenomenaal.
Deze inleiding was nodig om te kunnen vertellen welke gebeurtenis een grote invloed heeft gehad op mijn denken over het samenwerken met andere mensen.
Ik zat samen met de schoolpracticanten achter in een brugklas waar Piet les gaf. We zouden zijn les observeren en nabespreken. Dat vond Piet belangrijk voor zichzelf, maar ons hoofddoel was om studenten te leren hoe je een les kunt observeren en nabespreken. Ik herinner me dat ik tijdens zijn leergesprek met de klas op een zeker momet noteerde dat hij een denksprong maakte. Even later bleek dat ook te kloppen, want een meisje beantwoordde een vraag onjuist. Piet zag onmiddellijk waar de schoen wrong en zei tegen haar: 'Ik moet je mijn verontschuldiging aanbieden. Dat je het nu niet goed doet is mijn schuld. Ik heb het niet duidelijk

genoeg uitgelegd.' Je kon horen dat het geen toneelspel was van een geroutineerde leraar en alleen bedoeld om de leerlinge op haar gemak te stellen. (Dat zou trouwens ook niet slecht geweest zijn.) Nee, het was oprecht gemeend, hij voelde zich echt schuldig aan het incident en wist dat kenbaar te maken op een manier, waarvan ik diep onder de indruk raakte.

Later is Piet op zijn school begeleider van jonge leraren geworden. Ook na een opleiding op het PDI. En te oordelen naar de reacties van die jonge leraren, met dezelfde warmhartigheid. (Ik kan dit openlijk vertellen, want Piet en ik hebben over deze zaken vaak gesproken. En ik weet dat als ik hem dat had gevraagd, hij mij toestemming gegeven zou hebben op deze manier over hem te spreken.)
Ervaringen als die met Piet van Wingerden zijn wel degelijk van invloed geweest op mijn professionele ontwikkeling. Zeker. Ze versterkten me in mijn mening dat het beoefenen van algemene en vakdidactiek niet voldoende is voor de leraarsopleiding. Studenten daar moeten ruim de gelegenheid krijgen hun sociaal gevoel te ontwikkelen.

Belangrijke Ervaringen

Je vraagt me spontaan te reageren op LAKATOS. Dat is niet zo moeilijk: 'fascinerend, ik snapte opeens wat wiskunde kan betekenen voor iemand persoonlijk'.
Ik herinner me niet door wie ik attent gemaakt ben op 'Proofs and Refutations' (Cambrigde 1976). Wel dat ik het in één adem uitgelezen heb. Na zo'n twintig bladzijden was ik de logisch-wiskundige inhoud allang kwijt, maar ik kon niet ophouden. Het is nog steeds moeilijk te formuleren wat me er zo in aantrok. Een ding was, dat ik ontdekte dat er meer dan twee richtingen in de wiskunde waren (de 'klassieke' wiskunde en het 'intuïtitionisme'). Blijkbaar kon je de 'klassieke' wiskunde ook op allerlei manieren bedrijven. Ik had toen mijn lessen over 'wiskunde als activiteit' al gehad en begrepen. Hier kon je echter zien, dat dat niet alleen maar een ideële doelstelling voor het onderwijs is. Je kunt het op hoog niveau ook doen.
Ik heb het boek nog een paar maal moeten lezen om de inhoud ook een beetje te begrijpen en ik ben er niet zeker van of ik alles al door heb. Maar de geest van het boek was toen direct al wel doorgedrongen.

Hoe kom je nu bij VENNDIAGRAMMEN? O, ik snap al wat je daarmee wilt.
Het onderwerp is een tijd lang een heet hangijzer geweest bij de invoering van de moderne wiskunde. Voor mij was dat toen aanleiding om een artikel ('Over de nutteloosheid van Venndiagrammen') te schrijven in Euclides. Later werd dit door Freudenthal overgenomen in het zojuist door hem opgerichte tijdschrift Educational Studies in Mathematics. Ik probeerde in dat artikel duidelijk te maken welke vergissing we begaan hadden met te denken dat het Venndiagram een didactisch hulpmiddel was. Het tegendeel is waar, het is niet meer dan een hulpmiddel om het eindprodukt van wiskundig bezig zijn schematisch, in zijn logische samenhang, samen te vatten. Maar leren wat verzamelingen zijn doe je er niet van. Ik herinner mij dat ik daar verhitte debatten met Piet Vredenduin over had. Dat was in de tijd dat Piet mijn geworstel welwillend gadesloeg en eigenlijk wachtte op het moment dat ik weer op het rechte pad van de zuivere wiskunde terug zou keren. Later ben ik zeer onder de indruk gekomen (en dat ben ik nog) van de loyale manier waarop Piet mijn streven in de vakdidactiek erkende, zonder zijn eigen geweten geweld aan te doen. Hij zegt telkens weer dat wij elkaar aanvullen en ik voel dat ook zo. Maar toen ik van Piet Vredenduin eens te horen kreeg dat hij zoveel van mij geleerd had, gloeide ik wel van warmte.

'VROUWEN EN WISKUNDE': mijn eerste reactie? 'Wisten we maar of het helpt'.
De eerste zichtbare acties van Vrouwen en Wiskunde maakten op sommige mensen een wat ridicule indruk. Ik voelde me altijd boos worden als daar grapjes over werden gemaakt. Niet omdat het over 'vrouwen en wiskunde' ging, maar omdat het ging over mensen die oprecht bedoelden een misstand te lijf te gaan. Ik heb inderdaad erg mijn best gedaan om de groep in de Vereniging (NVvW) te krijgen. Hier en daar ontmoetten we wel wat weerstanden. Ook bij sommige vrouwen, die bang waren zo hun onafhankelijkheid te verspelen. Ik denk dat dat laatste wel in orde gekomen is. Felix Gaillard heeft namens het Bestuur nogal invloed gehad op de onderhandelingen en hij heeft dat met de van hem

zo bekende oprechtheid en doorzettingskracht gedaan. Dat de eerste acties wat ridicuul leken kwam hoofdzakelijk omdat de eerste zichtbare resultaten neerkwamen op het tellen van aantallen keren 'hij' en 'zij' in schoolboekjes. Iedereen voelde wel dat daarmee hoogstens een symptoom kon worden bestreden, en dat de oorzaak dieper lag. Velen vroegen zich af of het bestrijden van die dieper liggende oorzaken wel in het onderwijs kon geschieden. Was het niet eerder een zaak van maatschappelijke bewustwording en van verstrekkende opvoedingsidealen? Het antwoord is natuurlijk al lang bekend: 'Ja, maar...'. Dat weten de vrouwen veel beter dan ik. Op de puntjes in 'maar ...' kun je van alles invullen. Bijvoorbeeld: 'We weten heel goed dat het voor een deel om symptoombestrijding gaat, maar daarmee leer je mensen ook te zien dat er iets aan de hand is met hetgeen iedereen maar gewoon vindt, maar dat het dat in feite niet is'. Ik heb in dit verband veel van Francis Meester geleerd.

Wat je nu uit de groep 'Vrouwen en Wiskunde' ziet komen gaat veel dieper. Ik meen nu ook te zien dat het zoeken naar zogenaamd typisch vrouwelijke onderwerpen niet meer het denken domineert. Natuurlijk, want daarmee bevestig je weer wat nu juist bestreden had moeten worden.

Ik geloof, en ik meen dat ook te zien, dat je veel meer zou moeten zoeken in de richting van herkenbare en vooral sociale contacten. Daarmee haal je het zogenaamd typisch vrouwelijke er af. Je tracht leerlingen veel meer het gevoel te geven dat ze nuttig bezig zijn met zaken die de moeite waard zijn en die ze aankunnen. Dat is voor jongens ook goed. Zo moet je mijn spontane reactie: 'wisten we maar of het helpt' begrijpen. Waarmee ik maar bedoel: er is een belangrijke strijd gaande om wiskunde 'realistisch' te maken. Daarbij zijn beide seksen gebaat. Het lijkt dat je daarmee de oorzaak van vrouwendiscriminatie niet bestrijdt. Of toch wel? Kan het niet zijn dat als we dit maar lang genoeg volhouden, er een generatie opgroeit, waarin het percentage met een hekel aan wiskunde aanzienlijk kleiner is dan nu? En zullen daardoor niet vaders en moeders van de toekomst er veel minder toe komen hun dochters en zoons te suggereren dat wiskunde niks voor meisjes is?

Dit is allemaal wel wat simplistisch. Alleen van het onderwijs kan het niet komen.

Ik ga even in op dat woord 'realistisch'. Ik geloof niet zozeer in on-realistische wiskunde. Wiskunde in welke vorm dan ook is realistisch voor degeen die wiskunde doen prettig vindt. Of dat nu zuivere, toegepaste of toepasbare wiskunde is.

Zo heb ik ook een allergie ontwikkeld tegen uitdrukkingen als 'wiskunde en het dagelijks leven'. Alsof wiskunde niet een deel is van het dagelijks leven. Alsof beroepswiskundigen geen mensen zijn. Hetzelfde geldt voor 'wiskunde in contexten'. Alsof wiskunde niet een context is.

Ik probeer het daarom met uitdrukkingen als 'herkenbare contexten'. En als het om wiskunde gaat die toepasbaar is buiten de wiskunde om 'niet-wiskundige contexten'. In het bijzonder kun je dan nog praten over 'sociale context', 'technische context', 'economische context', 'huishoudelijke context', enz., enz.

We kunnen natuurlijk samen afspreken, dat we dat nu juist bedoelen als we spreken over 'realistische wiskunde' of over 'wiskunde in het dagelijkse leven'. Maar zo gaat dat niet met taal. Woorden hebben een eigen betekenis en die verander je niet zomaar door een of andere formele afspraak. Dat geldt ook in het geval van de 'meisjes en wiskunde'-beweging. Je kunt wel afspreken dat je gemakshalve met 'hij' ook de meisjes bedoelt, maar het duurt heel lang voordat de lezer bij 'hij' ook aan een meisje denkt.

Taal kan venijnig zijn in de sluipende betekenissen die doorsijpelen in ons geheugen. We moeten heel zorgvuldig zijn in het gebruik ervan. Vandaar dat ik nog even doorging op deze talige aspecten.

HET IS EEN HARDNEKKIG
MISVERSTAND:

dat je een nieuw leerplan kunt implementeren door het in te voeren.

TOPOLOGIE: 'nieuw, zette voor mij veel op een rijtje'.
Je hebt dit natuurlijk genoemd vanwege het topologieboek van Chinn en Steenrod dat ik samen met Tineke vertaald en bewerkt heb (Eenvoudige topologie, Groningen 1971).
Het vak zelf was niet nieuw voor me. Wel nieuw was de didactische opzet. In die tijd werd ijverig gezocht naar materiaal voor de 'keuzeonderwerpen' bij vwo-Wiskunde II. In dat boek zag ik voor 't eerst wat later aangeduid zou worden met: 'het expliciet maken van een probleemsituatie'. Op dat niveau had ik dat nog nooit in een wiskundeboek gezien. Het nieuwe voor mij was voornamelijk dat het mogelijk bleek wiskunde als activiteit te laten beleven en desondanks doelgericht af te stevenen op een van te voren bepaalde wiskundige structuur. In het boek ging het om de vraag 'Wanneer kan een vergelijking van de gedaante $f(x)=y$ bij gegeven y opgelost worden?' De auteurs sturen hun lezers stap voor stap naar nieuwe problemen toe. Eerst is er aandacht voor een nauwkeuriger en daardoor ook meer operationele formulering van de vraag. Dan komt het oprakelen van relevante kennis. Vervolgens wordt er een behoefte gekweekt aan begrippen als 'omgeving' en 'continuïteit'. Om de in het begin gestelde vraag te beantwoorden moet er op een zeker ogenblik onderscheid gemaakt worden tussen 'open en gesloten verzamelingen'. En zo doorgaand komen dan 'volledigheid', 'compactheid' en 'separabiliteit' aan de orde. Steeds wordt de behoefte gewekt aan meer inzicht, aan begrippen waarmee de vraag verder kan worden onderzocht. Je reinste Lakatos. Dat was wat er voor mij op een rijtje gezet werd: criteria voor didactische leerstofordening. Inderdaad een belangrijke ervaring.

A-WISKUNDE: 'niet af; jammer, want het is zo nodig'.
Ik ga niet vertellen waarom ik het zo nodig vind. Wel waarom ik vind dat het niet af is. Daarbij kan ik twee redenen bedenken.
De eerste is, dat het vermoedelijk niet mogelijk is om alle doelen van het wiskundeonderwijs schriftelijk te examineren. Ik heb Nanda Querelle eens horen zeggen, dat je op het Centraal Schriftelijk Examen alleen standaardvaardigheden moet examineren. De hogere doelstellingen behoorden volgens haar in het Schoolonderzoek aan de orde te komen. Zo'n uitspraak is verrassend, omdat we gewend zijn te geloven dat het Centraal Schriftelijk het hoogste en het moeilijkste is wat een leerling kan bereiken. Nanda keerde de zaak dus net om, en als je er even over nadenkt moet je haar gelijk geven. Je kunt best hogere doelen toetsen op een moment dat de leerling nog niet 'alles' gehad heeft. In zo'n geval gebruik je gewoon wat minder van de aan te leren theorie en te verwerven vaardigheden. Er moeten dus goede schoolonderzoeken komen.

HET IS EEN HARDNEKKIG MISVERSTAND:

dat je pas op een rekenmachientje mag werken als je de tafels van vermenigvuldiging kent.

Daar houdt de tweede reden verband mee: Als je een goed schoolonderzoek wilt afnemen, dan moet je het ook kunnen maken. En daar is het waar de Hewet-schoen wringt. Jan de Lange liet zich tijdens zijn promotie de kans niet ontglippen om dat eens goed in het openbaar te zeggen. Maar de Senaatszaal van de Rijksuniversiteit Utrecht is nog lang niet de Tweede Kamer.
Tijdens herscholingscursussen en voorlichtingsbijeenkomsten over Wiskunde-A werd steeds weer gevraagd, of er ook een cursus 'Context herkennen' gegeven werd. De mensen bedoelden daarmee, dat ze best in de krant wilden kijken of er iets bruikbaars was, maar dat dat niet hielp, want ze wisten niet waar ze naar moesten (kunnen) kijken.
Dat is een ernstig gebrek van de invoering van Wiskunde-A. We hebben te weinig gedaan aan het ontwikkelen van vaardigheden in het herkennen van situaties die geschikt zijn voor Wiskunde-A. Dat houdt in dat we zouden moeten beschikken over criteria waarmee je kunt beoordelen of een probleemsituatie echt genoeg is, motiverend ge-

noeg is. Of je de probleemsituatie kunt omwerken tot een voor leerlingen herkenbaar probleem, of de leerlingen er (voor hen nieuwe) wiskunde voor moeten leren om het probleem op te lossen.
Ik had gehoopt daarover wat meer in Jans proefschrift te kunnen vinden. Ik heb het niet gevonden en dus moeten we met z'n allen verder zoeken. Als dat niet lukt zal Wiskunde-A een iel en betekenisloos vak worden. En dát zou dood- en doodzonde zijn.

Kanttekeningen

Je vraagt of mijn denkbeelden over wiskunde en wiskundeonderwijs in de loop van de jaren veranderd zijn. Als ik daarover nadenk kan ik wel stellen dat wat aanvankelijk zeer diffuus was, langzamerhand steeds meer expliciet werd. Wat ik eerst vaag aanvoelde en waar ik nauwelijks raad mee wist, werd nu bespreekbaar en kon enigszins geordend worden. Ik heb daar al een paar voorbeelden van gegeven. Nu, ondermeer door dit gesprek, kan ik daar nog iets aan toevoegen: in mijn denken over wiskundeonderwijs ontwikkelde zich de idee 'Van *leren van* naar *leren met*'. Wat trouwens niet veranderd, maar juist bestendigd, ja zelfs versterkt is, is de reden waarom ik leraar geworden ben: het is fascinerend telkens weer te ondervinden dat je jouw kennis, jouw vaardigheden, jouw attitude aan anderen door kunt geven. Michael Otte noemt dat de grote paradox van het leren: 'Leren' suggereert dat een mens iets te weten komt wat hij vroeger niet wist, of iets kan wat voorheen niet mogelijk was. Aan de andere kant kun je alleen maar leren vanuit je eigen ervaringen. En die zijn oud! Is dat niet fascinerend?
We hebben het nog niet zo uitvoerig gehad over boeken. Tijdens mijn promotieonderzoek heb ik inderdaad heel wat schoolboeken als het ware microscopisch bekeken. Daarin stond de schoolwiskunde. Je kon ook zien hoe de auteurs zich voorstelden op welke wijze leerlingen met die wiskunde bezig zouden zijn. Natuurlijk heb ik toen ook heel wat boeken gelezen die 'over' wiskundeonderwijs gingen. Ja, laten we tot slot nog maar even over 'boeken' praten.
Hoe mijn 'ideale schoolboek' eruit ziet? Geen idee! Je kunt die vraag niet stellen. Als ik namelijk het antwoord wist, dan zou dat boek er al zijn. En als het er zou zijn, dan was het niet ideaal meer. Volgende vraag.
Het is inderdaad fijn om een schoolboek te schrijven. Ik pas dan mijn kennis toe en probeer me in te leven in de leerling. Ik merk nu ook dat wat ik in mijn proefschrift naar voren heb gebracht, geknipt is om leerteksten (goede, naar ik hoop) te ontwerpen. Voor mensen die spontaan het goede opschrijven, heb ik de grootste bewondering. We hebben er een paar in de Werkgroep Zestien Min/Zestien Plus. Ik zelf moet er altijd heel hard voor werken en ondervind dan veel steun van 'instrumenten' als OSaEV en de Kern-Probleem-dualiteit. Zo te zien is het schrijven van een schoolboek voor wiskunde te vergelijken met topsport: hard en regelmatig werken, inleven in je partner, vaardigheid toepassen en verder ontwikkelen, na veel afzien een blij gevoel overhouden als 't weer eens gelukt is.
Als ik ooit nog eens een didactiekboek zou schrijven, zou het de volgende titel hebben: 'Contract en Conflict'. Dat klinkt niet bepaald wiskundig-didactisch, maar beide begrippen vormen momenteel voor mij wel de basis van het onderwijs-leerproces. 'Contract' moet hier gezien worden in de betekenis van didactisch contract, zoals dat door Guy Brousseau naar voren wordt gebracht ('Problèmes de didactique des décimeaux', in 'Recherches en Didactique de Mathématique', 2.2, 1981). Het is een begrip als OSaEV. Als leraar weet je niet nauwkeurig wat het precies allemaal inhoudt, maar dat is ook nergens voor nodig. Je herkent het onmiddellijk als een elementair begrip. Elementair betekent hier: zonder dat bestaat de rest niet. Het blijkt goed aan te slaan bij studenten, veel meer dan OSaEV. Beide zijn uiterst bruikbaar bij het nadenken over je lessen. Je kunt er onmiddellijk mee aanwijzen waarom een les lekker liep en op welk moment er in de les iets verkeerd zat. In het geval van OSaEV moeten de studenten echter zelf wel enige onderwijservaringen hebben gehad. Het begrip 'contract' herkennen ze onmiddellijk, omdat ze daarmee ook direct kunnen aanwijzen waar hun eigen leerproces als student of als leerling in de knoop kwam.
Met 'conflict' bedoel ik het cognitieve conflict (Berlyne, Conflict, Arousal an Curiosity, New York 1960). Niet ruzie. Over beide begrippen heb ik in Aandachtspunten (Utrecht 1982) al wat gezegd,

Euclides
Inhoud van de 63e jaargang 1987/1988

Artikelen

Bijlage bij *Euclides 63, 9* juni/juli 1988

Diversen

Mededelingen

Recreatie

Kalender

Boekbesprekingen

Clint McCrory, Theodore Shifrin (ed)
Geometry and Topology-manifolds, varieties and knots, Marcel Dekker, 140
Crown, Fenrick, Valenza
Abstract Algebra, Marcel Dekker, 151
M. R. Cullen
Linear Models in Biology, Ellis Horwood Ltd., 119
Jeff Dunteman
Turbo Pascal compleet, Academic Service, 62
A. Heyting
Projectieve meetkunde, Epsilon, 152
R. E. Hoffmann en K. H. Hoffmann (eds)
Continuous Lattices and their applications, 94
A. F. Karr
Point Processes and their Statistical Inference, 119
Detlef Laugwitz
Zahlen und Kontinuum, Bibl. Inst. Mannheim, 62
Idem
Ingenieurmathematik, Wissenschaftsverlag Mannheim, 184
Robert Morris (ed)
Studies in Mathematic Education, 4 Unesco, 42
R. de Paepe
Basiswiskunde van het Secundair Onderwijs, Acco, 63
A. van Rooy
Analyse voor beginners, Epsilon Utrecht, 61
W. F. J. van Tour
Eindronde wiskunde, S.M.D., 63
M. M. Schiffer, L. Bowden
The Role of Mathematics in Science, John Wiley and Sons, 151
Auke Sikma
Logisch Logo, Academic Service, 184
Dr. F. Verhulst
Niet lineaire differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen, Epsilon, 120
Vrouwen en wiskunde
Vriendelijke Wiskunde, OW&OC, 247

maar ik zou ze graag, in samenhang, nader uitwerken. Ze illustreren beide mijn 'lijfspreuk': 'er is niets zo praktisch als een goede theorie'.
Welke vijf boeken ik 'nog eens' zou willen lezen? Dat zijn 'Mechanisering van het Wereldbeeld', van Dijksterhuis, 'Proofs and Refutations', van Lakatos, de verzamelde gedichten van Marsman, het 'Oude Testament' en 'Het Grote Vouwboek'.

Noot

* OSaEV = Oriënteren, Sorteren, abstractie controleren, Expliciteren, Verwerken.

Mededelingen

Nascholingscursussen wiskunde Zwolle

De lerarenopleiding wiskunde van de Christelijke Hogeschool Windesheim organiseert in het cursusjaar 1988/1989 de volgende nascholingscursussen voor eerste- en tweedegraads leraren:

- **Wiskunde op materieel nivo**
  Leren van wiskunde is vaak een zaak van praten, kijken, lezen, schrijven, tekenen en vooral nadenken. In deze cursus zullen we een ander aspect van wiskunde leren onderzoeken, te weten het handelen met materialen en apparaten door leerlingen als ondersteuning bij het leren van wiskundige begrippen en regels. Zoveel mogelijk zal aansluiting gezocht worden bij leerstof zoals die in het voortgezet onderwijs wordt behandeld.
  Cursusduur: 5 bijeenkomsten van 15.00-18.00 uur.
  Data: 5 oktober, 2 november, 7 december 1988 en 11 januari en 1 februari 1989.
  Plaats: Campus Zwolle.
- **HAWEX-wiskunde**
  Behandeld wordt het nieuwe eindexamenprogramma havo wiskunde A en B. Aan de orde zullen komen:
  onderwerpen die nieuw zijn, achtergronden, didactiek.
  Cursusduur: 12 bijeenkomsten van 15.00-18.00 uur.
  Data groep 1: donderdag vanaf 15 september 1988, wekelijks.
  Data groep 2: donderdag vanaf 1 februari 1989, wekelijks.
  Plaats: Campus Zwolle.

Voor meer inlichtingen en inschrijving kan men zich wenden tot het bureau nascholing van de sector HPO van de Hogeschool, tel.: 038-69 94 12.

Van het Ministerie van O en W

1. **Circulaire VO/BB-88-003, d.d. 29 maart 1988, Wiskunde A vwo.**
   In de circulaire VO/AV 86-07 van 5 juni 1986 is bekend gemaakt, dat in de examenjaren 1989, 1990 en 1991 het keuzeonderwerp statistiek tot het examenprogramma behoort. In tegenstelling tot wat in de circulaire VO-AV-86-07 is meegedeeld, heb ik besloten, dat het centraal examen zich niet over dit keuze-onderwerp zal uitstrekken. Het keuze-onderwerp statistiek dient wel onderdeel uit te maken van het schoolonderzoek. Vanaf 1992 zal ook het centraal examen zich over het keuzeonderwerp statistiek kunnen uitstrekken.
   Bij de staatsexamens zullen over het keuze-onderwerp statistiek in de jaren 1989, 1990 en 1991 geen vragen worden gesteld.
2. **Centrale examens wiskunde havo en vwo**
   Tot dusver was het gebruikelijk dat de te scoren punten ongeveer gelijk over de diverse opgaven verdeeld werden.
   Door deze werkwijze kon echter te weinig rekening gehouden worden met verschillen in zwaarte van de opgaven. Om dit facet in de beoordeling beter tot zijn recht te kunnen laten komen zal het puntenaantal dat per opgave behaald kan worden afhangen van de zwaarte en de complexiteit van de opgave. Het te scoren puntenaantal zal derhalve per opgave enigszins kunnen verschillen.
3. **Centrale examens vwo wiskunde B**
   In de circulaire VO/AV-86-07 van 5 juni 1986 staat aangegeven dat m.i.v. het examenjaar 1989 de onderwerpen differentiaal vergelijkingen, lijnelementenveld, oplossen van eenvoudige differentiaal vergelijkingen, cilinder, kegel, tot het examenprogramma wiskunde B behoren.
   T.a.v. het onderwerp differentiaal vergelijkingen bestaat in brede kring de wens om, in vergelijking met de invulling die het vak wiskunde I daaraan gegeven heeft, te komen tot een gewijzigde opzet van dit onderwerp.
   De Nederlandse vereniging van wiskunde-leraren heeft een werkgroep ingesteld om dit onderwerp nader te bestuderen. Daar de gedachten nog niet uitgekristalliseerd zijn, is het wenselijk dat het onderwerp differentiaal vergelijkingen de eerste tijd niet te uitgebreid aan de orde wordt gesteld. De volgende omschrijvingen geven aan in welke vorm de vragen over differentiaal vergelijkingen op de examens te verwachten zijn.

a. differentiaal vergelijkingen (dv) zullen niet geformuleerd worden met differentialen maar met differentiaalquotiënten;
   dus niet: $(-2x + y + 5)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$,
   maar: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + y + 5$;
b. het zal niet zo zijn dat er per se een geheel vraagstuk gewijd zal zijn aan een dv; het zou beperkt kunnen blijven tot een (of meer) onderdelen van een groter vraagstuk;
c. er zullen geen vragen gesteld worden over singuliere punten;
d. geen dv 'met parameters' zoals in het verleden soms werden opgegeven;
e. wel: 'controleren' of een gegeven functie een oplossing van een gegeven dv is;
f. wel: 'controleren' of een gegeven kromme integraalkromme van een gegeven dv is;
g. wel: lijnelementenveld en eenvoudige conclusies daaruit;
h. wel: het oplossen van eenvoudige dv's die door scheiding van variabelen zijn op te lossen.

Ter adstructie wordt een aantal voorbeeldopgaven gegeven; deze kan men aantreffen in Uitleg, het mededelingenblad van het Ministerie van O en W, nummer 12 van 27 april 1988.

De computer in het wiskunde-onderwijs (2)

Thema's voor een nascholingscursus

Douwe Kok

Inleiding

Computers kunnen een belangrijke rol in het wiskunde-onderwijs spelen en zullen dat in de toekomst ook zeker gaan doen. In Nederland begint, met name onder invloed van het NIVO-project, de verspreiding van de computers over de verschillende scholen een zekere omvang te krijgen. Voeg dit bij het gegeven dat al deze computers werken onder MS-DOS, een voor de ontwikkeling van software stimulerende omstandigheid, en een gematigd optimisme t.a.v. computer-gebruik in de klas is op zijn plaats.
In opdracht van NIVO heeft een groepje mensen (Guido Bakema, Piet van Blokland, Hans Krabbendam, Heleen Verhage en ik) een aantal thema's onderscheiden die bij elkaar een overzicht bieden van mogelijk zinvol computer-gebruik in het wiskunde-onderwijs ([1]). We kwamen tot de volgende lijst:
Functies en grafieken
Voortgezet rekenen
Statistiek en kansberekening
Meetkunde
Shortliners
Spreadsheet
Simulatie
Computer-algebra
Matric-rekening en besliskunde.

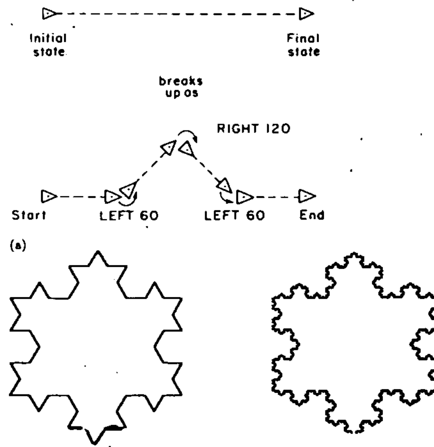
In het vorige nummer van Euclides zijn de eerste drie thema's kort besproken. Nu volgen de overige. Daarbij baseer ik me sterk op de tekst van het Raamplan NIVO-nascholing wiskunde, dat geschreven is door de hierboven genoemde personen.

4 Turtle geometry en ruimtemeetkunde

De rol die meetkunde kan spelen in het wiskunde-onderwijs krijgt de laatste tijd weer alle aandacht. Nu de grafische mogelijkheden van de micro-computer zo verbeterd zijn, moet ook nagegaan worden in hoeverre dit apparaat een bruikbaar leermiddel is bij een vernieuwd meetkunde-onderwijs.
Uit het boek 'Turtle Geometry' van Abelson en Di Sessa[5] blijkt dat, anders dan vaak gesuggereerd wordt, Turtle geometry ook aanknopingspunten biedt voor het huidige analyse-onderwijs. Via Turtle-graphics krijgen leraar en leerling de beschikking over een instrument om meetkundige figuren of functies grafisch te representeren. Er zijn aanwijzingen dat leerlingenpractica met turtle-graphics een meer onderzoekende houding bij leerlingen kunnen stimuleren. Recente ontwikkelingen in LOGO maken het mogelijk dat transformaties, vlakvullingen, projectiemethoden en vectormeetkunde onderwerpen zijn, waaruit die practica zouden kunnen bestaan.
Het voorbeeld figuur 3 maakt ook duidelijk wat de kracht van recursie is.
Veel meer over dit onderwerp vindt u in het dit jaar uitgekomen boek van Prof. Lauwerier over fractals[6].
Ruimtemeetkunde is weer terug in het bovenbouwprogramma van het voortgezet onderwijs.
De computer kan een krachtige ondersteuning bieden bij een belangrijk onderdeel van het leerproces in de ruimtemeetkunde: het maken van een voorstelling van een ruimtelijke figuur.
Met het programma Ruimfig[7] van het OW&OC hebben Heleen Verhage en Martin Kindt op bescheiden wijze geëxperimenteerd. Daarbij speelden de ideeën van Lauwerier[8] op de achtergrond een belangrijke rol. In de havo-experimenten zal met deze benadering, waarbij nu binnen een LOGO-omgeving geprogrammeerd wordt, verdere ervaring opgedaan worden.
Er zou eigenlijk een CAD-achtige omgeving (CAD = Computer Aided Design) gemaakt moeten worden, waarbinnen heel eenvoudig ruimtelijke figuren getekend, gedraaid, doorsneden etc. kunnen worden. De grafische mogelijkheden van de huidige micro-computer zijn goed genoeg voor zo'n programma. Zo'n hulpmiddel kan het onderwijs in de ruimtemeetkunde best gebruiken.

```
TO SNOWFLAKE (SIZE, LEVEL)
   REPEAT 3
      SIDE (SIZE, LEVEL)
      RIGHT 120

TO SIDE (SIZE, LEVEL)
   IF LEVEL = 0 THEN
      FORWARD SIZE
      RETURN
   SIDE (SIZE/3, LEVEL - 1)
   LEFT 60
   SIDE (SIZE/3, LEVEL - 1)
   RIGHT 120
   SIDE (SIZE/3, LEVEL - 1)
   LEFT 60
   SIDE (SIZE/3, LEVEL - 1)
```



Figuur 3

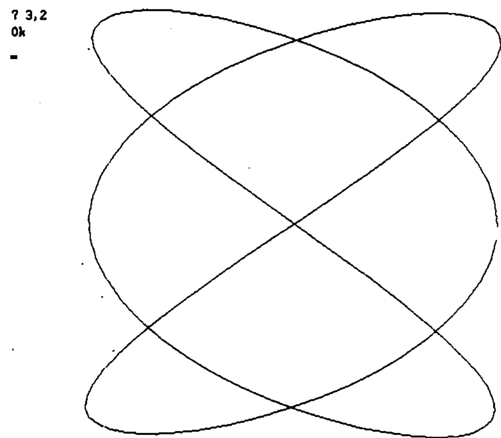
5 Short-liners

Met short-liners bedoelt men programma's die niet meer dan 20 regels tellen. Een listing past dus op een scherm. Deze korte programma's kunnen toch heel krachtig zijn. In zowel de USA als in Engeland wordt het belang van short-liners voor het wiskunde-onderwijs onderkend. Zo publiceerde de 'Mathematical Association' in 1986 een boekje met 132 Short Programs, geschreven in Basic. Bij dit boek hoort een schijfje voor de BBC. Ook Logo biedt trouwens een goede programmeeromgeving voor shortliners.

Het volgende in GWBASIC geschreven programma tekent de vermaarde Lissajous-figuren in een oogwenk.

```
10 cls
15 screen 2
20 pi=3.14159
30 window (-1.4,-1)-(1.4,1)
35 input a,b
40 preset (1,0)
50 for    t=0 to 2*pi step 0.05
60        x= cos (a*t)
70        y= sin(b*t)
80        line -(x, y)
90 next  t
```

U ziet hier de figuur voor a = 3 en b = 2 (figuur 4). De waarde van short-liners is tweeledig. Het schrijven van zo'n programma kan om te beginnen een zorgvuldige analyse van het onderwerp vereisen, men moet een algoritme begrijpen om het te kunnen benutten in een programma. Ook kan het draaien van zo'n programma een beter inzicht geven in wat er precies gebeurt. Hierbij ga ik er vanuit dat het programma door de leraar in samenwerking met de klas wordt geschreven.
Ook in Nederland vindt men al een begin van het gebruik van shortliners: namelijk in de OW&OC-pakketten voor Wiskunde-A. Daar wordt met een shortliner onderzocht wat de afgeleide is van $f(x)=\sin(2x)$. Zie hierover ook het bij OW&OC uitgegeven 'Hewet en de micro'[9].
Ook in dit verband moet de naam van Lauwerier genoemd worden die een indrukwekkende hoeveel-



Figuur 4

heid korte, veelal grafische programma's heeft geschreven. In de Nieuwe Wiskrant deed hij van dat werk enkele keren verslag. Onlangs verschenen van zijn hand de boeken 'Analyse met de Micro computer' en 'Meetkunde met de Microcomputer'[10].
Het lijkt ons de moeite waard om na te gaan welke rol korte programma's in het Nederlandse onderwijs zouden kunnen spelen.

6 Spreadsheets

Bij het onderwerp 'Spreadsheets' gaan we nu eens niet uit van het wiskunde-curriculum, maar van een stuk gereedschap dat zijn nut op vele plaatsen (voornamelijk buiten het onderwijs) al bewezen heeft.
De spreadsheet is een typisch rekenprogramma, zeg maar de opvolger van de zakrekenmachine.
Je kunt stellen dat het tot het normale repertoire van een wiskundeleraar zou moeten behoren om te weten wat een spreadsheet is en hoe zo'n programma werkt. Bovendien is het 'programmeren' in een spreadsheet een aardig alternatief voor veel korte rekenprogrammaatjes.
Het spreadsheet kan op vele plaatsen in de wiskundelessen worden gebruikt. Enkele voorbeelden:

- het maken van een tabel met functiewaarden;
- het opbouwen van een formule met tussenvariabelen (in hulpcellen of hulpkolommen);
- eenvoudige statistische bewerkingen als gemiddelde en standaarddeviatie;
- rijen, reeksen, limietprocessen;
- numeriek differentiëren en integreren;
- matrixbewerkingen.

Bij wiskunde A wordt al veel gebruik gemaakt van numerieke methoden en een spreadsheet kan daarbij een goed hulpmiddel zijn.

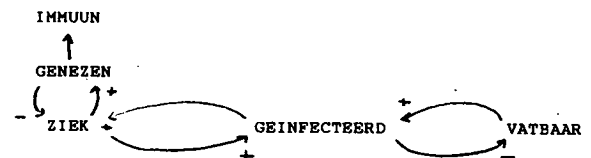
Binnen het Wiscom-project van de vakgroep OW & OC zijn voorbeelden ontwikkeld van computergebruik bij wiskunde. Men ging daarbij uit van PCCALC, de spreadsheet van het NIVO-startpakket[11].
Deze voorbeelden zijn gespreid over lbo, mavo, havo en vwo. In september 1987 zijn ze, samengebracht in een boek en op een bijbehorend schijfje verschenen[12].

7 Simulaties

Modelvorming neemt een steeds belangrijker plaats in het wiskunde-onderwijs in. Bekende voorbeelden uit het nieuwe wiskunde A programma zijn: modellen voor exponentiële en geremde groeiprocessen, prooi-roofdiersystemen.
De computer is een voor de hand liggend hulpmiddel om modellen snel door te kunnen rekenen. Er zijn speciale simulatietalen waarin modellen eenvoudig geformuleerd kunnen worden en die goede voorzieningen hebben om de resultaten van de berekeningen overzichtelijk (o.a. grafisch) weer te geven. Zo is binnen de vakgroep Didactiek van de Wiskunde aan de Vrije Universiteit door Piet van Blokland het pakket VU-dynamo ontwikkeld.
Onderstaand voorbeeld, afkomstig van Piet van Blokland laat zien hoe binnen dat programma een model van een griepepidemie kan worden gemaakt.
Enkele vooronderstellingen:

- De beginsituatie is een populatie van 1000 mensen met daarin 1 zieke.
- Als een persoon eenmaal ziek is, kan hij andere mensen aansteken.
- Een persoon kan de ziekte maar één keer krijgen.
- De ziekte duurt gemiddeld 5 dagen.

De populatie bestaat dus uit drie deelgroepen: De vatbaren, de zieken en de mensen die immuun zijn. Het oorzaak-gevolg-diagram staat hieronder (figuur 5).



Figuur 5

Het model bevat drie levels (immuun, ziek en vatbaar) en twee rates (genezen en geïnfecteerd worden).

Een voorbeeld van een level-vergelijking:
1 vatbaar = vatbaar + dt*-geïnfecteerd
Dit betekent dat het nieuwe aantal vatbaren gelijk is aan het oude aantal min het aantal dat in die periode is geïnfecteerd.

Een voorbeeld van een rate-vergelijking:
r geïnfecteerd = prcon*contact.
Prcon is de kans dat een contact tussen een zieke en een gezonde in ziekte resulteert.
Contact is het aantal contacten tussen zieken en gezonden. Gemcon is het gemiddeld aantal personen dat 1 persoon per dag ontmoet.
De gemiddelde duur van een ziekte is 5 dagen (Genasr = 5).

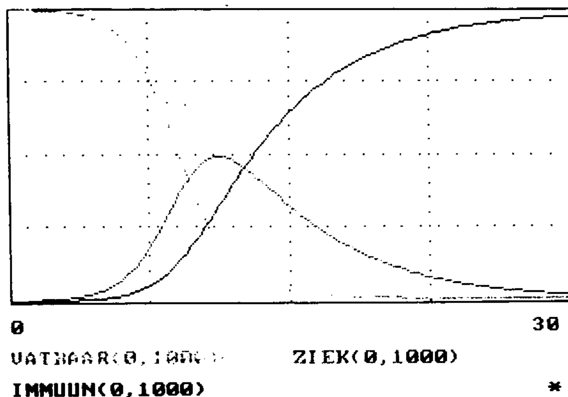
n is van iNitial. Als startwaarde voor het aantal vatbaren wordt genomen 999.

a staat voor auxiliary, wat hulpvergelijking inhoudt. Deze hulpvergelijkingen maken het model inzichtelijker.

Het VU-dynamo programma dat het verloop van de epidemie beschrijft, luidt:

```
l vatbaar = vatbaar + dt*-geïnfecteerd
n vatbaar = vatbaarn
c vatbaarn = 999
r geinfecteerd = prcon*contact
c prcon = .2 ; Kans dat een contact tot een infectie
leidt
a contact = gemcon*(vatbaar/totaal)*ziek
c gemcon = 5
NOTE GEMCON: = Gemiddeld aantal mensen
dat 1 persoon per dag ontmoet
n totaal = vatbaar + ziek + immuun
l ziek = ziek + dt(geïnfecteerd-genezen)
n ziek = ziekn
c ziekn = 1
r genezen = ziek/genasr
c genasr = 5 ;Gemiddelde duur ziekte
l immuun = immuun + dt*genezen
n immuun = immuunn
c immuunn = 0
spec dt = .25/eindtijd = 30/prtper = 1/bewaren
plot vatbaar, ziek, immuun (0,1000)
plot contact/geïnfecteerd
print vatbaar/ziek/immuun.
```

Op diverse plaatsen in het onderwijs zou meer aandacht aan het werken met modellen besteed kunnen worden.
In de middenbouw kan dit door bij een gegeven model met de constantes te manipuleren en de



Figuur 6

verschillende grafieken die zo ontstaan te bestuderen.
In de bovenbouw is het mogelijk dat leerlingen leren bij een probleem zelf een model op te stellen en dat model met behulp van een simulatietaal door de computer laten verwerken.
Het interpreteren van de uitkomsten is daarbij eveneens een belangrijke activiteit.
Het boek 'Introduction to computer simulation' van Nancy Roberts e.a.[13] biedt voor dergelijke benadering veel inspiratie.
Het onderwerp differentiaalvergelijkingen zou bij deze aanpak in een heel ander licht komen te staan. De nadruk zou niet langer liggen op analytische oplossingstechnieken, maar veeleer op het formuleren en interpreteren van modellen.

8 Computer algebra

Sinds enkele jaren is er ook voor micro-computers een computeralgebra-systeem beschikbaar, muMATH geheten.
Tot de mogelijkheden van muMATH behoren:
- rekenen met breuken, zoals 2/3 + 2/5 = 16/15;
- bewerkingen met vectoren en met matrices;
- rekenen met variabelen, bijvoorbeeld substitutie van waarden voor variabelen in allerlei uitdrukkingen;
- haakjes wegwerken of ontbinden in factoren;
- analytisch oplossen van vergelijkingen, bijvoorbeeld van vierkantsvergelijkingen, iets heel anders dus dan het benaderen van zo'n oplossing.
- analytisch differentiëren en primitiveren;

In vakbladen vindt men wel de veronderstelling uitgesproken dat systemen als muMath het onderwijs even drastisch zullen veranderen als de rekenmachine dat indertijd deed. (Sceptici onder ons zullen nu opgelucht ademhalen. Hoe drastisch was die verandering nu helemaal?)
De toekomst waarin onze leerlingen een rekendoosje bezitten dat exact kan rekenen en analytisch met formules kan omgaan, is hooguit 10 jaar van ons verwijderd. Nu al is er een zakrekenmachine op de markt die al aardig voldoet aan het hierboven geschetste beeld: de HP-28C. Dit apparaat is voor minder dan 800 gulden te koop. Deze programmeerbare rekenmachine annex formule-manipulator is ook nog eens uitgerust met een grafisch scherm. 10 jaar is misschien wel wat aan de ruime kant. In elk geval, kennismaking met een pakket als muMATH[14] lijkt dus voor iedere wiskundeleraar een must. Directe toepassingen bij alles wat met rekenen, algebra en analyse te maken heeft, liggen voor het oprapen[15].
In de literatuur wordt de verwachting uitgesproken dat over niet al te lange tijd voor de micro computeralgebra-systemen met grafische mogelijkheden op de markt zullen verschijnen.

Aldus worden we geconfronteerd met een situatie waar geen leraar om gevraagd heeft. Er wordt ons al een antwoord gegeven terwijl we niet eens de tijd kregen om de goede vragen te stellen. Alhoewel, we hebben nog een paar jaar de tijd voor onze leerlingen met zo'n apparaatje in hun tas het lokaal binnenstappen. Die tijd moeten we benutten om de vraag te beantwoorden welke vaardigheden essentieel zijn voor onze toekomstige leerlingen. Misschien zoiets als symbolisch schatten?

9 Matrixrekening en besliskunde

Met de invoering van wiskunde A is de matrixrekening vanuit een geheel nieuwe optiek in het wiskunde-onderwijs terecht gekomen. Een matrix wordt opgevat als een model om situaties wiskundig mee te beschrijven. Het accent ligt op het opstellen van modellen en de interpretatie van de uitkomsten.
Het valt te verwachten dat in de nabije toekomst ook in de onderbouw en op de havo matrices in praktische toepassingscontext behandeld zullen worden.
Elementen van besliskunde zoals lineair programmeren, komen zowel bij wiskunde A als straks op de havo aan de orde.
In deze vakken is het gebruik van de computer een geïntegreerd onderdeel van het curriculum (Automatische Gegevens Verwerking). In de praktijk is gebleken dat in het bijzonder matrixrekening en lineair programmeren tot computergebruik uitnodigen.
De computer wordt dan als gereedschap ingezet voor de verwerking van grote matrices of voor het uitvoeren van algoritmen voor lineaire programmering. Zie bijvoorbeeld het artikel van prof. H. C. Tijms in Euclides[16].

De vraag kwam al eerder naar voren: welke invloed zal de computer op de inhoud van het leerplan hebben. In het buitenland worden genoemd: meer aandacht voor numerieke wiskunde, maar zeker meer aandacht voor discrete wiskunde. Misschien zal in de komende jaren de besliskunde wel een belangrijker plaats gaan innemen, dan de bescheiden positie die ze nu heeft verworven. Het boek 'Decision Mathematics' van 'The Spode Group'[17] geeft een idee welke kant het op zou kunnen gaan.

Tot zover de globale behandeling van de thema's zoals die werden onderscheiden in het Raamplan NIVO-nascholing wiskunde.

Tot slot

In de cursus 1987/88 zal de werkgroep, waarvan ik de samenstelling in de inleiding noemde, rond de thema's teksten schrijven en software verzamelen en dat eventueel (laten) ontwikkelen. Dit materiaal zal dan als basis dienen voor de vakgerichte NIVO-nascholing die in de cursus 1988/89 van start zal gaan.
Een door ons aangelegde lijst met software kan alleen schriftelijk worden aangevraagd. Op deze

lijst staat aangegeven welke software met de NIVO-coupon kan worden betaald.
Verzoeken richten aan D. Kok.
Faculteit Wiskunde en Informatica
Vakgroep Didaktiek
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081
1081 HV Amsterdam.

Noten

1 Kok D. c.s.; *Raamplan NIVO-nascholing wiskunde* (voorjaar 1987)
2 Speelpenning J; *Over microcomputers, watermeters, badkuipen en couveuses*. Nieuwe Wiskrant 2 nr. 4
3 Kok Douwe en Marianne Pranger; *Zoek het functievoorschrift met de computer*. Euclides 63 nr 6
4 Blokland P. van; Statistiek en Computers. Euclides 61 nr. 7
5 Abelson and diSessa; *Turtle Geometry*. MIT Press. London, England.
6 Lauwerier Hans; *Fractals*, Aramith Uitgevers. Amsterdam.
7 Kindt M. en H. B. Verhage; *Ruimtemeetkunde met de micro*. Nieuwe Wiskrant 6 nr. 2 en 3.
8 Lauwerier H. A.; *Meetkunde met de micro*. Nieuwe Wiskrant 5 nr. 1
9 Verhage H. B.; *Hewet & Micro*. OW & OC. feb. 1986
10 Lauwerier H. A.; *Analyse met de Microcomputer* en *Meetkunde met de Microcomputer*. Beide boeken zijn uitgegeven bij Epsilon Uitgaven, Utrecht.
11 Verhage H. B.; *Een scheve schaats omgeturnd*. Nieuwe Wiskrant 6 nr. 4
12 WISCOM; *Voorbeelden van computergebruik bij wiskunde*. Vakgroep OW & OC. Rijksuniversiteit Utrecht.
13 Roberts Nancy e.a.; *Introduction to computer simulation*. Addison-Wesley Publishing Company. Amsterdam.
14 Stoutemyer D. R.; *muMath*. The Soft Warehouse. Honolulu, Hawaii, 96822
15 Neuwirth E.; *The impact of computer algebra for the teaching of mathematics*. Proceedings IFIP. Sofia, 1987.
16 Tijms H. C.; *Educatieve Operations Research Software: Wis en Waarachtig*. Euclides 62 nr. 8
17 Oxford University Press, Oxford, England, *Decision Mathematics*, The Spude Group

Software

1 *Badkuip en Flesvuller*. SLO, Enschede
2 *VU-grafiek*. Vrije Universiteit, Amsterdam
3 *Schatten*. SCO, Amsterdam
4 *Een wereld rond tafels*. SLO, Enschede
5 *VU-algebra: Los-op*. Vrije Universiteit, Amsterdam
6 *VU-stat*. Vrije Universiteit, Amsterdam
7 *VU-dynamo*: Vrije Universiteit, Amsterdam
8 *muMath*. The Soft Warehouse, Honolulu, Hawaii
9 *Linprog*. Vrije Universiteit, Amsterdam
10 *Graphic Calculus I, II, III*. Glentop Press, London
11 *Teaching with a Micro*: Math 1, 2 3, 4
ITMA, Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham, Engeland
12 *132 Short Programs*. mathematical Association. Stanley Thornes Ltd, Cheltenham, Engeland.

Commandeur Van der Blij

Op 13 mei van dit jaar nam Prof. dr. F. van der Blij, hoogleraar-directeur van het OW&OC en voorzitter van de Commissie Onderbouw Wiskunde, afscheid als hoogleraar aan de RU Utrecht. Bij die gelegenheid werd hij benoemd tot Commandeur in de Orde van Oranje Nassau en werd hem de zilveren erepenning van de RU Utrecht uitgereikt. De redactie van Euclides feliciteert Prof. dr. Van der Blij van harte met deze onderscheidingen.

Van de bestuurstafel...

Luuk Jacobs

Contact met Vlaanderen

Het bestuur onderhoudt al een aantal jaren contacten met het bestuur van de Vlaamse Vereniging Wiskunde Leraars. Er wordt jaarlijks een gemeenschappelijke bestuursvergadering gehouden; we bezoeken elkaars jaarvergaderingen; eenmaal per jaar werd een gemeenschappelijke studiedag georganiseerd. Omdat de belangstelling voor deze studiedagen afnam, hebben de beide besturen op de gemeenschappelijke bestuursvergadering op 19 september 1987 te Dordrecht besloten een werkgroep in te stellen om de contacten tussen Vlaamse en Nederlandse wiskundeleraren te bevorderen. Door de Vlaamse Vereniging zijn in de werkgroep benoemd mevrouw A. Bentein en de heer D. de Bock, terwijl de heren L. Bozuwa en S. Garst door de Nederlandse Vereniging zijn benoemd.

Als opdracht is aan de werkgroep meegegeven:

- het zoeken naar mogelijkheden om de contacten tussen Vlaamse en Nederlandse wiskundedocenten te bevorderen,
- het zoeken naar terreinen waarop samenwerking mogelijk is.

De werkgroep is voortvarend te werk gegaan en heeft op zaterdag 19 maart haar voorstellen aan beide besturen ontvouwd. Hoewel de werkgroep er van overtuigd is dat een lange-termijn planning zinvol is met het oog op 1992, het jaar waarin de Europese grenzen verdwijnen, meent zij toch dat het verstandiger is met voorstellen te komen die op korte termijn realiseerbaar zijn.

Voor de korte termijn stelt de werkgroep voor een vaste rubriek in 'Euclides' te openen waarin over het Vlaamse (wiskunde)onderwijs wordt geschreven en een vaste rubriek in 'Wiskunde en Onderwijs' te openen waarin over het Nederlandse (wiskunde)onderwijs wordt geschreven. De werkgroep acht het belangrijk dat uiteengezet wordt hoe het onderwijs in beide landen is ingericht en wat de plaats van de wiskunde hierin is en meent dat hieraan evenals aan projecten en vernieuwingen de nodige aandacht moet worden besteed. Het is niet de bedoeling dat voornamelijk zware beschouwingen hierover worden gepubliceerd. Vooral de inbreng van de docent voor de klas zal in de rubrieken te voorschijn moeten komen.

Beide besturen zien erg veel in deze aanpak. Zij zullen met de redacties van beide bladen contact opnemen om de plannen van de werkgroep voor te bereiden. De werkgroep verklaart zich, op verzoek van beide besturen, bereid voorlopig een jaar in actie te blijven om de rubriek in de tijdschriften op te starten en om door te werken aan de gestelde taak.

De werkgroep ziet hierbij drie doelen:

- een korte-termijn doel: het laten zien hoe het in het andere land gaat,
- een lange-termijn doel: het vormen van een pool om met elkaar kennis te maken en bij elkaar op bezoek te gaan,
- een algemeen doel: voorbij de grenzen te kijken en hierbij ook aan andere landen te denken.

Het bestuur van de Vlaamse Vereniging Wiskunde Leraren wil ook op het congres in 1989 te Oostende aandacht besteden aan Nederland.

Euclides

Het bestuur heeft overleg gevoerd met de redactie van uw tijdschrift. In de nieuwe jaargang zal een aantal dingen veranderen. Het ligt o.a. in de bedoeling een aantal rubrieken te openen. Een van deze rubrieken zal bestemd zijn voor verenigingsnieuws. In deze rubriek zal u meer geïnformeerd worden over de activiteiten van de vereniging, terwijl ook ruimte zal worden ingeruimd voor de artikelen uit Vlaanderen.

P.R.

Bij de aanvang van het verenigingsjaar had de vereniging 3008 leden. Tot 19 april hebben 75 leden hun lidmaatschap beëindigd, terwijl 88 mensen zich

hebben aangemeld als nieuw lid. We zijn blij dat het aantal leden van de vereniging groeit, maar toch is het aantal leden te klein vergeleken met een aantal van 10.000 wiskundeleraren. Het bestuur heeft besloten zich wat actiever op te stellen om zodoende meer wiskundeleraren te bewegen lid van de vereniging te worden. Om dat voor te bereiden is een commissie Public Relation ingesteld. In deze PR-commissie zitten Agneta Aukema, Hettie Goemans, Freek Mahieu en auteur dezes. De commissie heeft nog geen concrete plannen uitgewerkt, dus daar hoop ik u later over te informeren. De commissie hoopt wel dat ook u zal meewerken aan het uitbouwen van de vereniging. Uw reacties zijn van harte welkom. (Is uw collega al lid van de vereniging?).

Logo

De PR-commissie vindt het een gemis dat de vereniging geen eigen herkenningsteken heeft. Het ontwerpen van een logo is een dure aangelegenheid (1 à 2 duizend gulden). Wellicht zijn er enkele leden die zo creatief zijn dat zij een logo kunnen ontwerpen. De PR-commissie kijkt met belangstelling uit naar uw reacties.
Tot slot wens ik u allen, mede namens het bestuur, een goede vakantie toe.

Correctie

Door een technische fout is de helft van de bijdrage van Luuk Jacobs op pag. 248 van nummer 8 weggevallen. Met verontschuldigingen van de redactie volgt hieronder het betreffende gedeelte.

HAWEX

Het HAWEX-experiment is ook dit jaar van start gegaan op drie scholen in Dokkum, Utrecht en Geldrop. Op één van de bestuursvergaderingen heeft Martin Kindt uitvoerig verslag gedaan van de stand van zaken.
Wie de eerste experimentele teksten ziet, moet tot de conclusie komen, dat er zowel bij wiskunde-A als bij Wiskunde-B veel gaat veranderen t.o.v. de oude wiskunde. De wiskunde-A is nog meer geënt op alledaagse conteksten en bevat minder formele wiskunde dan de wiskunde-A van het vwo. Bij de analyse van wiskunde-B wordt ook uitgegaan van conteksten. Op de studiedag kunt u binnen werkgroepen ook kennis nemen van deze ontwikkelingen. Omdat er geen gelden beschikbaar zijn voor nascholing leven er binnen het bestuur de gedachten om op regionale studiedagen de leden van de vereniging tijdig voor te bereiden op de nieuwe ontwikkelingen.

HEWET

Het eerste landelijke examen hebben we gehad; het tweede examen staat voor de deur. Zoals reeds in de jaarrede op de jaarvergadering in oktober 1987 is gemeld zijn er nog vele vragen rond de invoering van het nieuwe programma in het vwo. Ondertussen heeft in 'Uitleg', het mededelingenblad van het Ministerie van Onderwijs, het definitieve programma gestaan. Het wijkt in enkele punten af van het voorlopige programma. In één van de volgende nummers van Euclides hopen wij de correctie voor het Vademecum op te nemen. Het bestuur zal bij de betreffende instanties aandringen op een evaluatie van het effect van HEWET op de doorstroming naar het HBO en het WO. Verder moet er binnen de nascholing aandacht komen voor de *didaktiek* van het nieuwe wiskunde-onderwijs. Wellicht is het mogelijk hier aandacht aan te geven op meerdaagse didaktiekconferenties. U hoort er meer van!

Brief aan de Staatssecretaris

Den Haag, 8 juni 1988

Excellentie,

Zoals wij U reeds eerder berichtten, heeft het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren fundamentele bezwaren tegen het gebruik van meerkeuzetoetsen voor het vak wiskunde bij de eindexamens voor lbo en mavo op C- en D-niveau.

De voornaamste bezwaren zijn:
- doordat de kandidaten slechts moeten aangeven welke het juiste alternatief is, kunnen en mogen zij geen motivering geven en is het nooit zeker of zij wiskundig hebben geredeneerd,
- de meerkeuzevragen maken kandidaten, ondanks de inspanningen van hun docenten, tot gemakkelijke beslissers,
- de werkwijze van de kandidaten bij het eindexamen wiskunde moet geheel anders zijn dan die bij een aantal andere vakken. Is bij de moderne talen de methode om direct alle alternatieven te lezen en daaruit het goede of het meest passende antwoord te kiezen, bij wiskunde is het juist nodig dat de kandidaten eerst het vraagstuk maken en vervolgens met het gevonden antwoord zoeken welk alternatief zij hierbij moeten kiezen.

Daar de meerkeuzevragen bij het gemengde werk niet meer door de computer van het CITO worden nagekeken maar door docenten, is het mogelijk geworden de meerkeuzevragen te vervangen door kort-antwoord-vragen.
Nadat de kandidaten een vraagstuk gemaakt hebben, schrijven zij hierbij slechts het gevonden antwoord op.
Deze vraagstelling leidt tot eenzelfde objectiviteit als de beantwoording van meerkeuzevragen. In beide gevallen is elke vraag òf goed òf fout beantwoord. Daar bij kort-antwoord-vragen het raadaspect wordt weggenomen, zullen de kandidaten zich aanmerkelijk actiever moeten opstellen zodat tenminste één van bovengenoemde bezwaren wordt weggenomen.
Op de regionale besprekingen van het examen wiskunde, zoals deze jaarlijks door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren worden georganiseerd, is er ook door de aanwezige docenten op aangedrongen om de meerkeuzevragen door kort-antwoord-vragen te vervangen.

Wij verzoeken U om, indien de door ons voorgestelde vereenvoudiging niet bij alle vakken met gemengd werk kan worden doorgevoerd, deze toch, bij wijze van experiment, bij wiskunde door te voeren.

Namens het bestuur van de Nederlandse
Vereniging van Wiskundeleraren,

(J.Maassen)

Vakwerk Wiskunde, een bespreking

Hans Sybrandy

Het is een uitstekende gedachte van de Landelijke Pedagogische Centra geweest om de verworvenheden van de vakken in het Mavo-project door middel van de serie 'Vakwerk' voor een groter publiek toegankelijk te maken. Dit geldt zeker voor het vak wiskunde, waar de ontwikkelingen elkaar in sneltreinvaart opvolgen.
In het boekje Vakwerk Wiskunde is een aardige poging gedaan om niet alleen vanuit de ervaringen van het Mavo-project te schrijven, maar een ruimere bijdrage te leveren aan de verdere ontwikkeling van het schoolvak wiskunde.
In het eerste hoofdstuk voert de schrijver de lezer langs een aantal praktijkvoorbeelden, waaruit blijkt hoe zeer leerlingen verschillen, om vervolgens, in het tweede hoofdstuk, een poging te doen om door middel van wat technieken en organisatievormen rekening te houden met de verschillen. Hier siert bescheidenheid de meester, daar we bij de afsluiting van dit hoofdstukje lezen: 'Geen oplossing voor alle problemen'.
Het derde hoofdstuk is voor de meer theoretisch ingestelden. Getracht wordt om via onder andere Russische leerpsychologie (Galperin, met de 'trapsgewijze procedure') en via probleemanalyse (oplossingsmethoden zoals algoritmen, heuristieken en denktechnieken komen aan de orde, toegelicht met enkele onderzoekjes) helderheid te verschaffen over leerpsychologische aspecten van het wiskundeonderwijs. Zoals gezegd, voor wie geïnteresseerd is in achtergronden is dit zeker lezenswaard!
Wat mij betreft het best leesbaar en meest praktijkgericht is het vierde hoofdstuk: 'De aanpak in de klas'. Vooral begrippen als de zingeving van het wiskundeonderwijs, contextrijke wiskunde, visualiseringen en niveaus van zekerheid worden niet alleen helder en klaar uitgelegd, maar ook levendig toegelicht met veel voorbeelden uit methoden, IOWO-materiaal en dergelijke. Toch mag hier een enkele kritische kanttekening niet ontbreken. Als de schrijver zich in het onderdeel 'motivatie' wat al te zeer laat gaan komt hij tot een wel erg gemakkelijke stelling: 'Strenge discipline in de klas eist gehoorzaamheid: negatieve motivatie is een gevolg'. Ik denk dat dat te simpel is. Dat strenge discipline immer een negatieve motivatie oplevert wil er bij mij niet in. Sterker nog, ik ken voorbeelden waarin door strenge discipline leerlingen de leerstof beter gaan snappen en daardoor juist positief gemotiveerd worden.
Heel goed zijn in dit hoofdstuk de geweldige mogelijkheden beschreven die er liggen om samen te werken tussen vakken. Een leuk voorbeeld wordt gegeven in een samenspraak tussen de heren Matema (leraar wiskunde), Lamp (leraar natuurkunde) en Van Zwavelen (leraar scheikunde) over een praktijkopdracht schatten. Wat mij betreft hadden hier ook bijvoorbeeld de heren Stel (leraar Nederlands) en Geos (leraar aardrijkskunde) een rol in kunnen spelen. Trouwens, hier past een woord van waardering voor het pleidooi dat gehouden wordt voor het 'schatten', c.q. 'inschatten'. Een facet dat volgens mij nog steeds ondergewaardeerd wordt.
Samenvattend kan ik zeggen dat ik het boekje met erg veel plezier gelezen heb. De combinatie van de theoretische achtergronden en praktijkgerichte voorbeelden laat zich prima lezen.
Een laatste, kritische, noot betreft de prijs, want *f*55,– is te veel voor wat het boek biedt, niet qua inhoud, maar qua uitvoering. Het boek is zonder één kleurtje of afbeelding uitgevoerd; de helft van het bedrag was dan ook reëler geweest.
Maar: ik beveel elke wiskundedocent die geïnteresseerd is in de vernieuwing van het wiskundeonderwijs het boek van harte aan!

Vakwerk Wiskunde, Praktijkboek voor Scholen in Ontwikkeling.
Uitgegeven door Educaboek, onder auspiciën van de Landelijke Pedagogische Centra.
Auteur: Hans Aalmoes.

Kolom



George Schoemaker

-1-

Dit is het eerste stukje onder deze titel. Het zal in deze kolom steeds gaan over de werkzaamheden van het team wiskunde twaalf zestien.
Het team W12/16 heeft de opdracht een voorstel voor een nieuw eindexamenprogramma te formuleren op grond van experimenten. Deze experimenten moeten in 1992 leiden tot een nieuw leerplan en een eindexamenprogramma. Het team W12/16 is uitvoerend orgaan van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs waarin alle geledingen van het Nederlandse wiskundeonderwijs vertegenwoordigd zijn. Momenteel zijn we – leden van het team – o.a. bezig met gesprekken met scholen over participatie in het experiment. We krijgen veel positieve reacties op ideeën over wijzigingen in het programma in gesprekken waarin de tijd is om over en weer naar elkaar te luisteren. In oppervlakkige gesprekken of in lezingen over het werk merken we nogal eens terughoudendheid en argwaan. Dat is nogal wiedes.
Achter iedere voorgenomen programmawijziging kan men een schuldvraag vermoeden.
Docenten: hebben we het soms verkeerd gedaan, onze leerlingen de minder belangrijke dingen uit de wiskunde geleerd? Deugen onze werkvormen niet? Stemt onze didactiek niet overeen met de 'dernier cri' van de projectontwikkelaars? Ze hebben ineens de meisjes en de allochtonen uitgevonden als groepen die speciale aandacht vragen. Alsof wij niet al jaren hiermee aan het werk zijn.
Auteurs: hebben we slechte boeken geschreven? Te veel letterrekenen, te veel vroegtijdige abstractie en te weinig vanuit de toepassingen?
Eerst over de docenten: Door ons werk als team komen we in zeer uiteenlopende klassen met zeer verschillende docenten. Docenten hebben een eigen stijl. Leerlingen hebben er niet zo veel last van als die stijlen verschillen. Volg één dag met een klas alle lessen en u bent genezen van de zorg dat leerlingen in de war raken van stijlverschillen bij docenten. Als die stijlen maar echt zijn, bij de mensen horen. Leerlingen krijgen pas last als docenten een niet bij hen passende onderwijsstijl wordt opgedrongen.
Waar we ons veel meer zorgen over moeten maken is de hoeveelheid extern storende factoren die het onderwijs op een schooldag teisteren. Het beroep van docent wordt echt steeds moeilijker. Dat betekent dat een nieuw programma ruimte moet laten aan de docent om eigen sterke kanten te gebruiken. Geen koppelverkoop van nieuwe onderwerpen met bijvoorbeeld groepswerk. Een programma moet onderwijsbaar zijn.
Tegen de auteurs kan ik zeggen: Wie de schoolboeken bekijkt, ziet een breed aanbod van realistisch wiskundeonderwijs tot tamelijk mechanistisch wiskundeonderwijs. Wel zijn de toepassingen in alle typen boeken een grotere plaats gaan innemen. Aan didactische doordenking en uitlijning is veel zorg besteed. De lay-out is enorm verbeterd. Ouders zeggen als ze de brugklasboeken van hun kinderen zien: 'Als ik zo wiskunde had mogen leren, was het anders met me gegaan.' Maar in diezelfde boeken moet men ook toewerken – bijvoorbeeld in de deeltjes voor drie en vier mavo – naar een eindexamen dat voor veel van deze leerlingen te formeel is.
Je moet goede argumenten hebben als je tot een programmawijziging wilt komen. Er is lef voor nodig om docenten lastig te vallen met vernieuwingen in een afbrokkelend onderwijs waar kwaliteit er alleen toe doet als het niks kost.
Die argumenten zijn er voor het programma voor de leeftijdsgroep 12 tot 16:
Er zijn ontwikkelingen in het onderwijs gaande en ook al gerealiseerd in programma's in basisschool en bovenbouw vwo/havo. Dat houdt verband met nieuwe inzichten binnen de samenleving. Wiskundeleerstof is minder vanzelfsprekend, er worden eisen gesteld aan de toepasbaarheid van het geleerde en aan de relevantie voor de leerling in zijn of haar verdere loopbaan. Er is een duidelijke maatschappelijke keuze om de wiskunde dichter bij de leerling te zoeken en daarbij ook te zorgen dat

groepen als meisjes en allochtonen aan hun trekken komen. Een andere trend is het benutten van de mogelijkheden van de computer.
Er zijn al ontwikkelingen ingezet. In de schoolboeken voor brugjaar en tweede leerjaar is dat goed te zien. In de meeste boeken wordt de bocht gemaakt in klas twee naar de meer formele wiskunde op een tijdstip dat veel leerlingen daar nog niet aan toe zijn en sommigen al lang. Met name voor de leerlingen van de toekomstige onderstroom is er geen passend programma. In feite zijn veel docenten en ook auteurs op enigszins veilige afstand van het eindexamen – in brugjaar en tweede leerjaar – al een richting ingeslagen die niet strookt met het huidige eindexamenprogramma.
Kortom: Het team W12/16 heeft de taak nieuwe wegen te openen. Betrokkenen in het wiskundeonderwijs dienen daarbij een grotere rol te krijgen dan die van toeschouwer langs de kant van de weg.

Programma studiedag

Het programma van de studiedag staat in het teken van de vernieuwingen in het wiskundeonderwijs zoals bij wiskunde 12-16 en HAWEX. Er zijn drie lezingen met tegelijkertijd werkgroepen voor de overige deelnemers.

10.30-10.45 uur: **Inleiding op de studiedag**
10.45-11.00 uur: Pauze, koffie, inschrijven op de groepen
11.00-12.15 uur: **Lezing over wiskunde 12-16** daarnaast acht groepen
12.15-13.30 uur: Lunch
13.30-14.45 uur: **Lezing over HAWEX** daarnaast acht groepen
14.45-15.00 uur: Pauze, koffie, thee
15.00-16.15 uur: **Lezing over Mediageniek Wiskundeonderwijs**

Nederlandse vereniging van Wiskundeleraren

Jaarvergadering/studiedag 1988

Eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 1988 op zaterdag 29 oktober 1988 in het gebouw van:
Het Nieuwe Lyceum
Jan Steenlaan 38
3723 BV Bilthoven
030-78 30 60
Aanvang 10.00 uur.

Agenda:
9.30-10.00 uur: Aankomst, koffie
10.00-10.30 uur: **Huishoudelijk Gedeelte**

a. Opening door de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen.
b. Notulen van de jaarvergadering 1987 (zie Euclides nr. 7).
c. Jaarverslagen (zie Euclides).
d. Decharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
Het bestuur stelt kandidaat*):
Drs. S. Garst, Oude Tonge en drs. H. Verhage, Utrecht.
e. Bestuursverkiezing in verband met het periodiek aftreden van F. F. J. Gaillard, M. Kindt en mw. drs. J. van Vaalen. De heer Kindt en mevrouw Van Vaalen stellen zich niet herkiesbaar.
Het bestuur stelt kandidaat*):
F. F. J. Gaillard, dr. J. van Lint en mw. M. Meeder.
f. Vaststelling van de contributie 1989/1990. Het bestuur stelt voor de contributie vast te stellen op *f* 55,–.

10.30-16.30 uur: **Themagedeelte** (studiedag)
16.30-17.00 uur: **Huishoudelijk Gedeelte**

g. Rondvraag.
h. Sluiting.

*) Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van deze oproep kunnen eveneens personen schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur door ten minste vijf leden.
Zie ook pag. 278.

De nieuwe bestuurskandidaten:

Hans van Lint

Na het behalen van het doctoraal examen wiskunde heeft hij in het voortgezet onderwijs in Zwolle gewerkt.

Sinds 1970 is hij naast docent wiskunde ook conrector aan de Rijksscholengemeenschap te Zwolle. Hij is lid geweest van de Hewet-begeleidingscommissie en daarvoor van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en de Adviesgroep Leerplanontwikkeling.

Van 1969 tot 1980 was hij lid van de redactie van Euclides.

Marja Meeder

Na het behalen van de akten wiskunde A en B heeft zij vanaf 1967 in het voortgezet onderwijs in Amsterdam gewerkt; aanvankelijk op havo en vwo, later ook op mavo.

De laatste tien jaren is zij naast docent wiskunde ook conrector geweest aan een school voor volwassenenonderwijs.

Vanaf de oprichting van de Werkgroep Vrouwen en Wiskunde is zij actief betrokken bij deze groep en mede-auteur van de boeken 'VrouWiskundig' en 'Vriendelijke Wiskunde'.

Met ingang van 1 januari 1988 werkt zij in Utrecht bij het team Wiskunde-twaalf-zestien.

Meer informatie

In september 1988 ontvangen alle wiskundesecties van scholen voor voortgezet onderwijs een uitnodiging voor de studiedag. Ter gelegenheid van de studiedag verschijnt een publikatie die naar allen die zich aangemeld hebben gestuurd zal worden.

Meer inhoudelijke informatie over de studiedag en informatie over de wijze van aanmelden kunt u vinden in Euclides jaargang 64 nr. 1. Deze aflevering verschijnt in september 1988.

3e Vlaamse Wiskunde Olympiade

Derde ronde, woensdag 20 april 1988, 15-18 uur

1 Toon aan dat $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12$ niet kan worden ontbonden als produkt van twee veeltermen van de tweede graad met gehele coëfficiënten.

2 Een driedimensionaal kruis bestaande uit zeven congruente kubussen is ingeschreven in een sfeer met straal R.
Bepaal de inhoud van dit driedimensionaal kruis.

3 *Gegeven*
Een n-tal is een opeenvolging van n getallen gekozen uit $\{0, 1, 2\}$.
Een 'goed' n-tal is een n-tal waarin noch 1, noch 2 onmiddellijk worden herhaald.
Voorbeeld van een 'slecht' 7-tal 0111212.
Voorbeeld van een 'goed' 7-tal 1210012.
Gevraagd
Bepaal het aantal 'goede' 10-tallen.

4 Zij R een strikt positief getal en beschouw een driehoek met zijden $R + \frac{1}{2}$, 1 en R.
Zij θ de grootte – in radialen – van de hoek tegenover de zijde met lengte 1.
Bewijs dat
$2R\theta > 1$ (1)
$2R\theta < \pi$ (2)

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

591. f is een functie van ℝ naar ℝ.
$\forall x,y\colon (f(x+y))^2 = f(x^2) + f(y^2)$
$\exists x,y\colon f(x) \neq f(y)$
Gevraagd f.

592. Een tweede opgave voor degenen die hun oplossing willen inzenden aan bovenstaand adres, hoogstens twee maanden na het verschijnen van dit nummer.
f is een continue functie van ℝ naar ℝ.
Voor elke reële x en n waarvoor deze uitspraak betekenis heeft, geldt: $(f(x))^n = f(x^n)$.
Gevraagd f.
Ik schrijf dit op 30 december 1987 en kan daardoor niet nalaten eraan toe te voegen: is het mogelijk dat $f(1987) = 1988$?

Oplossingen

587. Wat is het kleinste getal p waarvoor geldt: als in een straat minstens p mensen wonen, dan wonen er zeker 11 mensen in waarvan de som van de leeftijden deelbaar is door 11?
Ons interesseert alleen maar de leeftijd van de bewoners modulo 11. We rekenen hieronder dus uitsluitend modulo 11.
Als in de straat twintig mensen wonen, is het mogelijk dat er geen elf zijn waarvan de som van de leeftijden deelbaar is door elf. Kies namelijk van tien van hen de leeftijd 0 en van de andere tien de leeftijd 1.
Ik beweer nu: als er in de straat eenentwintig (of meer) mensen wonen dan zijn er wel elf met som leeftijden deelbaar door elf. Wonen er in de straat elf mensen met gelijke leeftijd (mod elf), dan is hun som 0. Wonen er elf mensen met elf verschillende leeftijden (dus 0, 1, 2, ..., 10), dan is hun som eveneens 0. Deze twee gevallen sluiten we daarom in het vervolg uit.
Onderstel in de straat wonen tien mensen met verschillende leeftijden, bijv. 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Kies nu deze tien mensen en bovendien nog twee. Onderstel de som van de leeftijden van deze twee is 9. Vervang de bewoner met leeftijd 5 door de twee bewoners met som 9. We krijgen dan elf bewoners met som 0. Mocht de som van de twee nieuw gekozen bewoners 8 zijn, dan hebben we pech gehad. We kiezen dan een derde nieuwe bewoner. Is van twee van de drie de som ongelijk 8, dan is de pech opgeheven. Mochten ze alle drie leeftijd 4 hebben, dan vervangen we 3 en 5 door 4, 4 en 4 en is de som weer 0 geworden.
Onderstel in de straat wonen maar negen mensen met verschillende leeftijd. bijv. 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10. Er ontbreken 4 en 9; $4 + 9 = 2$. Kies drie nieuwe. Onderstel hun som is 8. Kies uit de oorspronkelijke negen er twee met som $8 - 2$, dus 6. Vervang deze twee door de drie nieuwe. We krijgen dan weer een elftal met som 0. Dit lukt altijd.
Zo kunnen we verder gaan. Ik spring liever direct op een geval dat essentieel moeilijker is. In de straat wonen maar vijf mensen met verschillende leeftijden. Noem deze a, b, c, d, en e. We kunnen uit deze vijf er twee wegnemen op tien verschillende manieren. Deze tien verschillende manieren hoeven geen tien verschillende sommen op te leveren, maar het zijn er in elk geval wel zeven. De (maximaal) vier sommen die niet optreden, noem ik verboden sommen.
Nu wil ik aan de vijf leeftijden a, b, c, d, e, er acht toevoegen en dan van de vijf er twee wegnemen zo, dat ik elf leeftijden met som 0 krijg. Onderstel $a + b + c + d + e = s$. De som van de acht nieuwe is t. In totaal heb ik dan dertien leeftijden met som $s + t$. Van de oorspronkelijke vijf neem ik er dan twee weg met som $-s - t$. Ik houd dan elf leeftijden over met som 0. Dit kan als $-s - t$ geen verboden som is.
Onderstel er zijn eenentwintig bewoners. Vijf daarvan hebben leeftijd a, b, c, d, e. Ik kan dus nog zestien nieuwe kiezen. Ik beweer dat ik uit deze zestien er acht kan kiezen waarvan de som niet-verboden is. Ik toon daartoe aan dat er zeker vijf achttallen te vormen zijn met verschillende sommen. Er zijn maar vier verboden sommen. Onder deze vijf is er dus een die niet-verboden is. Nu het bewijs.
Onder de zestien nieuwe zijn in elk geval vier gelijke. Laten we zeggen a, a, a, a. Er zijn, volgens afspraak, onder de eenentwintig bewoners hoogstens tien met leeftijd a en onder de zestien nieuwe dus hoogstens negen. Dientengevolge hebben we twee mogelijkheden. Behalve de a, a, a, a zijn er onder de zestien nog vier gelijke: b, b, b, b. Zo niet, dan is er een viertal van de vorm b, b, c, c.
Geval b, b, b, b. Kies het viertal a, a, a, a. Vervang een of meer a's door b. We krijgen dan a, a, a, b of a, a, b, b of a, b, b, b of b, b, b, b. Stel $b - a = p$. Deze vijf gevallen leveren dan als som resp. $4a$, $4a + p$, $4a + 2p$, $4a + 3p$, $4a + 4p$. Dat zijn vijf verschillende sommen. Voeg in elk van de vijf voorkomende gevallen een zelfde viertal toe. We krijgen dan vijf achttallen met verschillende sommen.
Geval b, b, c, c. Stel. $c - a = q$. We kunnen dan de vier a's weer vervangen door één of meer b's en c's. Als sommen krijgen we dan $4a$ vermeerderd met $0, p, 2p, q, 2q, p + q, p + 2q, 2p + q, 2p + 2q$.
Onder deze sommen kunnen gelijke voorkomen. Onderstel bijv. $q = 2p$. Dan zijn er geen negen, maar zeven verschillende, nl. $4a$ plus $0, p, 2p, 3p, 4p, 5p, 6p$. Er zijn andere mogelijkheden.

Maar in elk geval zijn er wel vijf van de sommen verschillend. Voeg weer vier vaste toe.
Hiermee is het bewijs voltooid.
Onderstel nu er zijn maar vier verschillende leeftijden: a, b, c en d. We gaan dan analoog te werk. Uit de vier leeftijden kunnen we zes verschillende paren kiezen. Dat levert minstens vijf verschillende sommen. Dus hoogstens krijgen we zes verboden sommen. We beschikken over zeventien nieuwe bewoners. Hieruit kiezen we er negen. We tonen aan dat we dit op verschillende manieren kunnen doen zo, dat we zeven verschillende sommen krijgen, dus minstens één niet-verboden som. Dit doen we door te beschouwen de gevallen *aaaaaa*, te vervangen door *bbbbbb* resp. *aaaaa*, te vervangen door vijf leeftijden te kiezen uit *bbbbcc*.
Zijn er maar drie verschillende leeftijden, dan zijn er acht verboden sommen en achttien nieuwe bewoners. Daaruit kiezen we er op verschillende manieren negen zo, dat we negen verschillende sommen krijgen. We beschouwen daartoe de gevallen *aaaaaaaa*, te vervangen door *bbbbbbbb* of door *bbbbbbbc* resp. *aaaaaa*, te vervangen door zes leeftijden uit *bbbbbccc*.
Met enig geduld kunt u het napluizen. Maar uitpluizen is leuker.

Van Dirk Kruyswijk ontving ik de mededeling dat voor elk priemgetal p geldt: ieder stelsel van $2p - 1$ restklassen modulo p bevat een deelstelsel van p elementen met som 0 modulo p.
Het feit dat een dergelijke algemene stelling bestaat, doet me vermoeden dat het probleem een eleganter oplossing toelaat dan de mijne, maar die toch alleen maar van elementaire hulpmiddelen gebruik maakt. Als iemand iets in deze richting vindt, houdt ik mij aanbevolen.
Ik heb slechts één reactie ontvangen, namelijk van Bert Holleman, die echter bestond uit een juist vermoeden zonder bewijs.

588. De Jansens zijn 25 jaar getrouwd. Ze willen zeven buren de kans geven in de feestvreugde te delen, de echtparen A, B, C, D, E, F en G. Jansen laat hen lootjes trekken, genummerd 1 tot 700 onder weglating van de 7-vouden. Een stel buren waarvan de som van de loten deelbaar is door 7, mag mee uit eten gaan. Het stel dat zich het eerst meldt, is het gelukkige. Is er gegarandeerd zo'n stel?
Voor ons zijn alleen van belang de getallen op de loten modulo 7. Onderstel A, B, C, D, E, F, G trekken resp. de loten met getallen a, b, c, d, e, f, g (mod 7). Beschouw de getallen a, $a + b$, $a + b + c$, $\ldots$, $a + b + c + d + e + f + g$. Zijn deze alle zeven verschillend, dan is er één gelijk aan 0. Zijn ze niet alle verschillend, dan zijn er twee gelijk, bijv. $a + b$ en $a + b + c + d + e$. In dat geval is $c + d + e = 0$. Er is dus in elk geval een stel buren waarvan de som van de loten deelbaar is door 7.
Kan het zijn dat Jansen alle buren mee krijgt?
Dat kan, maar de kans hierop is niet te berekenen. Het kan zijn dat de buren alle zeven loten trekken die mod 7 gelijk zijn. Hun som is dan deelbaar door 7. Een andere mogelijkheid is bijv. $a = 2, b = 1, c = 1, d = 5, e = 3, f = 5, g = 4$.
In dat geval kunnen zich o.a. melden *ABCE*, *DFG*, *BCF*, *AD*, maar is het ook mogelijk dat de buren zich alle zeven melden. De kans hierop is niet zonder meer uit te rekenen.
Hoe groot is de kans dat er twee buren zijn met som loten gelijk aan 0?
Het is gemakkelijker eerst de kans uit te rekenen dat er geen dergelijk paar is. Dat is het geval als alleen maar getrokken zijn loten 123, 236, 135, 236, 145, 356 of 456.
We gaan eerst na op hoeveel manieren het mogelijk is dat 1, 2 en 3 alle drie voorkomen en geen andere. Er zijn de volgende mogelijkheden:

aantal keren dat 1, 2, 3 voorkomen	aantal permutaties
$1(5\times)2(1\times)3(1\times)$	$\frac{7!}{5!} = 42$
$1(4\times)2(2\times)3(1\times)$	$\frac{7!}{4!\,2!} = 105$
$1(3\times)2(3\times)3(1\times)$	$\frac{7!}{3!3!} = 140$
$1(3\times)2(2\times)3(2\times)$	$\frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$

De aantallen keren dat 1, 2 en 3 voorkomen, kunnen ook nog gepermuteerd worden, zodat we in totaal krijgen:
$3 \cdot 42 + 6 \cdot 105 + 3 \cdot 140 + 3 \cdot 120 = 1806$ manieren waarop 1, 2 en 3 alle die voorkomen en 4, 5 en 6 niet.
Het totaal aantal manieren waarop 123, 124, ..., 456 alle drie voorkomen en geen andere, is dan $8 \cdot 1806 = 14448$.
Het kan ook zijn dat twee cijfers voorkomen en geen andere, namelijk elk tweetal behalve 16, 25, 34. We gaan eerst na op hoeveel manieren alleen 1 en 2 kunnen voorkomen.

aantal keren	aantal permutaties
$1(6\times)2(1\times)$	7
$1(5\times)2(2\times)$	21
$1(4\times)2(3\times)$	35

In totaal geeft dit $2(7 + 21 + 35) = 126$ mogelijkheden.
Voor alle paren samen geeft dit $12 \cdot 26 = 1512$ mogelijkheden.
Dan zijn er nog 7 mogelijkheden dat er slechts één getal voorkomt. Er zijn dus alles met elkaar $14448 + 126 + 7 = 14581$ mogelijkheden dat er geen tweetal gevormd kan worden dat mee uit eten gaat. De kans dat dit zich voordoet, is $\frac{14581}{6^7} = 0{,}052$.
De kans dat de schade voor Jansen beperkt blijft, is dan 0,948.
Nogal geruststellend voor hem.

Kalender

27 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres
29 oktober 1988: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW
24 en 25 november 1988: Beekbergen, 2e VALO-conferentie Wiskunde 12-16.
Aanmelding hiervoor bij H. Hesselink, Postbus 2061, 7500 CB Enschede.

Inhoud

Adressen van auteurs

G. Bulthuis, Ganzenwei 302, 2361 XE Warmond

Prof. dr. F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin

D. Kok, p/a V.U. Faculteit Wiskunde en Informatica, Vakgroep Didactiek, De Boelelaan 1081 HV Amsterdam

G. Schoemaker, De Dissel 11, 1251 ZA Laren

H. Sybrandy, Berkelwijk 31, 3831 MN Leusden